Table des matières

CH 12 : Matrices

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ représente soit l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, soit l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$.

I Généralités : notations, définitions

I. 1 Définitions

Matrices, ensemble $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$:

Définition 1. Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
- On appelle matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ un tableau de nombres appartenant à $\mathbb{K}$, sur n lignes et p colonnes.
- Si A est une telle matrice, on note $a_{ij} \in \mathbb{K}$ le coefficient de la i-ème ligne et j-ième colonne. Ainsi, dans le cas général, on a :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & x_{d2} & a_{d3} & \dots & a_{np} \end{bmatrix}$$

- L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$

remarque Soient $A = (a_{i,j})_{i=1\dots n, j=1\dots p}$ et $B = (b_{i,j})_{i=1\dots n', j=1\dots p'}$

On dit que les deux matrices A et B sont égales si et seulement si

- $n = n'$, $p = p'$

- $a_{ij} = b_{ij}$

Exemples. • $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix}$. On a alors

- $B = \begin{pmatrix} i & 2-i & 1+3i \\ 3 & -4+7i & -5i \\ 8-i & -i & 6+i \\ 2+6i & -9+i & 1+4i \end{pmatrix}$. On a alors

Exercice 2. Donner des matrices A, B et C telles que $A \in \mathcal{M}_{32}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{12}(\mathbb{C})$ et $C \in \mathcal{M}_{24}(\mathbb{R})$.

Matrices carrées, ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

Définition 3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

- Si $n = p$, on dit que la matrice est carrée
- L'ensemble des matrices carrées de taille n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Exemples. • Exemple d'une matrice carrée réelle de taille 2 :

- Donner une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

Exemples.

I. 2 Matrices particulières

Définition 4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

- Si A est une matrice à n lignes et 1 colonne, on dit que A est est une matricce colonne

- Si A est une matrice à 1 ligne et n colonnes, on dit que A est une matrice ligne.

Matrices diagonales :

Définition 5. Une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est diagonale si $\forall i, j, i \neq j \implies a_{ij} = 0$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemples.

Définition 6. Matrices triangulaires :

- Une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est triangulaire supérieure si $\forall i, j, i \geq j \Longrightarrow a_{ij} = 0$ A est donc de la forme

$$\begin{bmatrix} a_{11} & * & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est triangulaire inférieure si$\forall i, j, i \leq j \Longrightarrow a_{ij} = 0$ A est donc de la forme

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Définition 7. Soient (n, p) deux entiers naturels non nuls.

- La matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 est appelée la matrice nulle.
- La matrice diagonalle avec que des 1 sur la diagonale est appelée la matrice identité de taille n. Elle est notée Id_n

Exemples.

$0_{23} =$ $\qquad$ $I_2 =$ $\qquad$ $I_3 =$ $\qquad$ $0_{14} =$

Définition 8. Soient les entiers naturels non nuls (n, p) fixés.

- Pour tous $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on note $E_{ij} \in \mathcal{M}_(\mathbb{K})$ la matrice ....

  ....
- Les matrices E_{ij} sont appelées les ....

Exemples. On se place ici dans $\mathcal{M}_{23}(\mathbb{R})$. Donner toutes les matrices élémentaires.

I. 3 Transposée d'une matrice

Définition 9. Transposée d'une matrice :

Soit $A = (a_{i,j})_{i=1\dots n, j=1\dots p} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.
On appelle transposée de A et on note A^t, la matrice $B = (a_{j,i})_{j=1\dots p, i=1\dots n} \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ définie par

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$ alors

La transposée d'une matrice s'obtient donc par symétrie par rapport à la diagonale.

Exemples.
- Calculer la transposée de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

- Calculer la transposée de $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 9 & -6 & -2 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 10. Matrices symétriques et anti-symétriques :
- Une matrice est dite symétrique si $A = A^t$
- Une matrice est dite anti-symétrique si $A = -A^t$

Exemples.
- Donner deux exemples de matrices symétriques : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -12 \end{pmatrix}$
- Donner deux exemples de matrices anti-symétriques : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
- Donner un type de matrice toujours symétrique : matrices diagonales.

Remarques.
- Les matrices symétriques sont forcément carrées
- Propriétés des matrices anti-symétriques :
  - ⋆ Les matrices anti-symétriques sont forcément carrées.
  - ⋆ Il n'y a que des 0 sur la diagonale.

II Opérations élémentaires dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$

II. 1 Somme de deux matrices de même taille

Définition de la somme de deux matrices :

Définition 11. Sommes de matrices :
Soient $A = (a_{i,j})_{i=1\dots n, j=1\dots p}$ et $B = (b_{i,j})_{i=1\dots n, j=1\dots p}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On note $A + B$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par : $A + B =$

Exemple 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$

⚠ On ne somme que des matrices de même taille (meme nombre de colonnes, meme nombre de lignes)

❶ **Associativité :** $\forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3$,

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

❷ **Commutativité :** $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$,

$$A + B = B + A$$

❸ **Somme et transposée :** $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$,

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

II. 2 Multiplication par un scalaire

Définition 12. Multiplication par un scalaire :
Soient $A = (a_{i,j})_{i=1\ldots n, j=1\ldots p}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On note λA la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par : $\lambda A =$

Exemples. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $5A$ et $-2A+3B$.

$$5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \\ 25 & 30 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad -2A+3B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

❶ **Associativité :** $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$$

❷ **Distributivité :** $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \begin{cases} \lambda(A+B) & = \lambda A + \lambda B \\ (\lambda+\mu)A & = \lambda A + \mu A \end{cases}$

❸ **Multiplication par 0 :** $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$0A = 0_n$$

❹ **Multiplication et transposée :** $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

III Produit matriciel

III. 1 Produit matriciel : définition

Exemples.

- On définit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculons AB.
- On définit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculons AB puis BA.
- On définit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$. Calculons AB.

Définition 13. Soient $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$ trois entiers naturels non nuls. Soient $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ avec $A = (a_{i,j})_{i=1\ldots n, j=1\ldots p}$ et $B = (b_{i,j})_{i=1\ldots p, j=1\ldots q}$.
Le produit AB de la matrice A par la matrice B est la matrice $C \in \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, q]\!]\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

⚠Le produit matriciel $A \times B$ n'est défini que si le nombre de collones de A est égal au nombre de lignes de B.

Exercice 14. Calculer tous les produits de deux matrices possibles avec les quatre matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}$

Remarques.
- Le produit matriciel AB peut exister sans que BA existe.
- ⚠Même si AB et BA existent, ils ne sont généralement pas égaux.

Exemple 2. Multiplication matrice-vecteur et lien avec les sytèmes linéaires. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Calculer AX. Mettre sous forme matricielle le système $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

Le système correspond à l'équation matricielle

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

III. 2 Propriétés

Proposition 15. Soient $(n, p, q, r) \in \mathbb{N}^4$ des entiers naturels non nuls. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire.
Pour tout couple de matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})^2$, tout couple de matrices $(C, D) \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})^2$ et toute matrice $E \in \mathcal{M}_{qr}(\mathbb{R})$, on a :

- **Distributivité du produit matriciel par rapport à l'addition :**

$$(A + B)C = AC + BC$$

  L'ordre est important ce n'est pas $CA + CB$.
- **Distributivité du produit matriciel par rapport à la multiplication par un scalaire :**

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

- **Associativité du produit matriciel :**

$$(AC)E = A(CE)$$

- **Elément neutre et produit matriciel :**

$$A\,\mathrm{Id} = \mathrm{Id}\,A = A$$

- **Produit matriciel et transposition :**

$$(AB)^T = B^T A^T$$

  ⚠l'ordre est important !

⚠Les propriétés habituelles du produit sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ ne s'appliquent pas du tout au produit matriciel. Donnons quelques exemples :

Remarques.
- Deux matrices NON NULLES peuvent avoir un produit NUL. Calculer AB avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$:

- La règle de simplification par un facteur non nul dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ne s'applique pas du tout aux matrices. On peut très bien avoir $AB = AC$ ....
  Calculer AB et AC avec $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$:

- Le produit matriciel ....
  Calculer AB et BA avec $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.
- Les identités remarquables et le binôme de Newton sont en général faux avec des matrices car on utilise pour les démontrer la commutativité du produit dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  Soient $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3$.

  $(A+B)^2 =$ $\qquad$ $(A-B)(A+B) =$ $\qquad$ $(A+B)^3 =$

- Les propriétés usuelles dans $\mathbb{R}$ avec les puissances sont aussi en générale fausses avec les matrices toujours à cause de la non commutativité du produit matriciel.
  Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  $$(AB)^3 = ABABAB \neq A^3B^3$$

III. 3 Puissances n-ièmes de matrices carrées

On se place dans toute cette section dans $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ ensemble des matrices carrées de taille r, $r \in \mathbb{N}^\star$. Ainsi tous les produits matriciels ont bien un sens.

Définition 16. Soient $n \in \mathbb{N}$ et A une matrice carrée non nulle de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$. On définit A^n matrice de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ pour tout entier naturel n par la récurrence suivante

$$\begin{cases} A^0 = \mathrm{Id} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ A^{n+1} = A^n A \end{cases}$$

Proposition 17. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ une matrice carrée diagonale. On a :

$$A^n = diag(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_r^n)$$

⚠ Ca ne marche UNIQUEMENT pour les matrices diagonales.

Exercice 18. Calculer les puissances n-ièmes de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Proposition 19. Soient A et B deux matrices qui commutent $AB = BA$, on a alors :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ (AB)^n = A^n B^n$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$

Méthode pour calculer A^n quand on connaît une relation entre les petites puissances de A :

- On calcule une relation entre par exemple A^2, A et I_r (ou entre A^3, A^2, A et I_r...).
- On démontre par récurrence l'existence d'une ou plusieurs suites permettant d'exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de A et de I_r.

- La récurrence nous donne alors la relation de récurrence vérifiée par ces suites.
- De cette relation, on en déduit l'expression explicite des suites.
- On en déduit l'expression de A^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 20. On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3$.
2. Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A^n = a_nA + b_nI_3$.
3. Donner l'expression explicite de ces deux suites et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode 3 : Par diagonalisation ou trigonalisation (voir en TD)

IV Matrices et systèmes linéaires

Proposition 21. Écriture matricielle d'un système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1p}x_p & = & y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2p}x_p & = & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{np}x_p & = & y_n. \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

La matrice A est appelée la matrice associée au système

Exemple 3. L'écriture matricielle du système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ -x & - & y & + & 3z & = & -2 \\ 6x & + & 8y & - & z & = & 2 \end{array}\right.$ est

Définition 22. Rang d'une matrice :

On appelle rang d'une matrice A, noté $rg(A)$, le rang du système $AX = 0$

Pour calculer le rang du système on doit le mettre sous forme échelonné.

Méthode pour calculer le rang d'une matrice :

On utilise directement sur la matrice la méthode du pivot de Gauss (sans revenir au système associé).

Exercice 23. Donner le rang des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

Exercice 24. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & \alpha \\ 3x & + & 4y & = & \beta \end{array}\right.$ et en déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculer l'inverse d'une matrice A revient donc à résoudre le système linéaire $AX = Y$ pour arriver à $X = A^{-1}Y$, et ainsi identifier les coefficients de A^{-1}. En pratique, on utilise la méthode du pivot de Gauss directement sur les matrices, en remarquant que l'on peut réécrire notre résolution du système sous la forme :

$$AX = I_n Y \Leftrightarrow I_n X = A^{-1}Y.$$

Ainsi, si l'on arrive à passer de la matrice A à la matrice I_n grâce à la méthode du pivot de Gauss, les mêmes opérations permettront de passer de la matrice I_n à la matrice A^{-1}.

- On part de la matrice $(A|I_n) \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{K})$ si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- On effectue les opérations élémentaires classiques sur les LIGNES.

BUT Transformer la partie gauche de la grosse matrice, à savoir A, en I_n.

- ⋆ Toujours possible si A est inversible et on connaît A^{-1} car : $(A|I_n) \underset{\text{opérations}}{\longrightarrow} \left(I_n|A^{-1}\right)$.
- ⋆ Impossible si $\text{rg}(A) < n$, et dans ce cas la matrice A n'est pas inversible.

Exercice 25. Reprendre les matrices de l'exercice précédent, et calculer l'inverse des matrices inversibles.

Exercice 26. Étudier l'inversibilité de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et calculer son inverse si elle est inversible.

V Matrices carrées inversibles

Une matrice NON carrée ne peut pas être inversible. On se place donc dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

V. 1 Définition et propriétés

Définition 27. Définition d'une matrice inversible :

- Soit A matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les conditions suivantes sont équivalentes :
  1. Le rang de A vaut n
  2. L'équation $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ admet une unique solution : $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
  3. Il existe une matrice B telle que $AB = BA = \text{Id}$

  On dit dans ce que la matrice A est inversible et la matrice B est alors notée A^{-1} s'appelle l'inverse de A

Exemples. • Étude de l'inversibilité de I_n : est inversible d'inverse I_n.

- Étude de l'inversibilité de 0_n :n'est pas inversible $rg(0_n) = 0$
- Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $-A$ est son inverse.

Remarques. • Si A est inversible et que l'on a : $AB = AC$ alors $B = C$

- Si A est inversible et que l'on a : $AB = 0_n$ alors $B = 0$

Proposition 28. Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^\star$. Alors :

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$
- $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

V. 2 Cas Particulier

Inversibilité des matrices diagonales et triangulaires supérieures

Proposition 29. Inversibilité des matrices diagonales et inverse :

- Une matrice diagonale $A = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ est inversible si et seulement si tous les λ_i sont non nuls. $(\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i \neq 0)$
- Son inverse est alors donné par :

$$A = \text{Diag}(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots \frac{1}{\lambda_n})$$

Exemples. Étudier l'inversibilité de $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 30. Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous les éléments diagonaux sont non nuls.

⚠ Il n'y a pas de formule générale pour l'inverse. ⚠

Exemples. Étudier l'inversibilité de $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -9 \\ 0 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et de $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

Inversibilité des matrices dont on connaît une relation entre les petites puissances Lorsque l'on connaît une relation entre une matrice A et ses petites puissances (A^2, A^3...), on sait facilement si la matrice est inversible ou pas et dans le cas où elle est inversible, on connaît tout de suite l'inverse.

Méthode pour étudier l'inversibilité quand on connaît une relation entre les petites puissances :

- Cas d'inversibilité :
  - ⋆ Si, dans la relation entre les puissances de la matrice A, la matrice I_r est présente, alors A est inversible.
  - ⋆ Pour trouver A^{-1}, on met A en facteur et on écrit : $AC = I_r$ alors $A^{-1} = C$ par définition de l'inversibilité.
- Cas de non inversibilité :
  - ⋆ Si, dans la relation entre les puissances, la matrice I_r n'est pas présente, alors A n'est pas inversible.
  - ⋆ Pour le montrer, on utilise un raisonnement par l'absurde.

Exercice 31.
- Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $M^2 = -M + 2I_3$. En déduire que M est inversible et calculer son inverse.
- Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 3A$ puis que la matrice A n'est pas inversible.

V. 3 Cas particulier des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Définition 32. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Le déterminant de A est défini par :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Exercice 33. Calculer le déterminant des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Proposition 34. Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Son inverse est alors donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 35. Étudier l'inversibilité des matrices A et B de l'exercice précédent, et calculer leur inverse si elle existe.

Exercice 36. Résoudre le système $\left\{ \begin{array}{rcrcr} -x & + & 3y & = & 1 \\ 2x & - & y & = & 3 \end{array} \right.$.

V. 4 Lien avec les systèmes linéaires

Proposition 37. Soient $\mathcal{S}$ un système de n équations à n inconnues et A la matrice qui lui est associée.

- Le système est de Cramer si et seulement si $rg(A) = n$
- De plus, dans ce cas, l'expression de l'unique solution de $AX = Y$ est

$$X = A^{-1}Y$$