# TD 11 : Applications

## I Images directe

**Exercice 1.** On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $x \mapsto x^3 - 3x$.

1. Étudier les variations de $f$.
2. Déterminer $f([1,2])$, $f(\mathbb{R})$, $f([-1,+\infty[)$.

**Exercice 2.**

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction carrée. Déterminer $f\left([-1,2]\right)$.
2. Déterminer $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ et $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right[\right)$.

**Exercice 3.** Soit $f$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout complexe associe son module.
Calculer l'image directe par $f$ de :

1. $A = \{z \in \mathbb{C},\ \exists x \in \mathbb{R},\ z = x + 2i\}$
2. $A = \{z \in \mathbb{C},\ \exists x \in \mathbb{R},\ z = (1 + \cos(x)) + i\sin(x)\}$.

## II Injection, surjection, bijection sur des exemples concrets

**Exercice 4.** Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes. Lorsqu'elles sont bijectives, déterminer les applications réciproques.

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$
2. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$
3. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \right.$
4. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \right.$
5. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$
6. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$
7. $f : \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$
8. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array} \right.$
9. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^4 \end{array} \right.$
10. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^4 \end{array} \right.$
11. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^5 \end{array} \right.$
12. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array} \right.$, $n \in \mathbb{N}^\star$
13. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & ]1,+\infty[ \\ x & \mapsto & e^{-x}+1 \end{array} \right.$
14. $f : \left| \begin{array}{ccc} ]-1,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x) \end{array} \right.$
15. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & ]-4,+\infty[ \\ x & \mapsto & 2^x - 4 \end{array} \right.$
16. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [-\sqrt{2},\sqrt{2}] \\ x & \mapsto & \cos(x)+\sin(x) \end{array} \right.$
17. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 2n+1 \end{array} \right.$

**Exercice 5.** Soit $f : [1,+\infty[ \to [0,+\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. $f$ est-elle une bijection ?

**Exercice 6.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. L'application $f$ est-elle injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ? Surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ?
2. Montrer que la restriction $g : [-1,1] \to [-1,1]$ est une bijection.

**Exercice 7.** Soit $f$ définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x}$.

1. Étudier la fonction $f$. On note $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition.
2. L'application $f$ est-elle injective de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbb{R}$ ? Surjective de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbb{R}$ ?
3. Montrer que la restriction $g : [2, +\infty[\to] - \infty, -4]$ est une bijection.

**Exercice 8.** Soit $f$ une application définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{1-2x}$. Montrer que $f$ est bijective de $\mathcal{D}_f$ sur un sous ensemble de $\mathbb{R}$ à déterminer et déterminer $f^{-1}$.

**Exercice 9.** Étudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Sur quels intervalles $f$ est-elle une bijection ? Déterminer alors la bijection réciproque sur l'intervalle contenant 1.

**Exercice 10.** Montrer que l'application $f : z \mapsto \dfrac{z+i}{z-i}$ est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ sur un sous ensemble à déterminer. Donner la bijection réciproque.

**Exercice 11.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \max\left(\dfrac{x+5}{10}, x-3\right)$. L'application $f$ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Si oui, déterminer son application réciproque.

**Exercice 12.** Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$. Montrer que $f$ est bijective et déterminer sa réciproque.

**Exercice 13.** Soit $f : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{U}$ avec $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ définie par $f(z) = \dfrac{z}{|z|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$.

1. Montrer que $\forall u \in \mathbb{U},\ f(u) = u$ et en déduire que $f$ est surjective.
2. La fonction $f$ est-elle injective ?

## III Injection, surjection, bijection sur des exemples abstraits

**Exercice 14.** Montrer que la composée de deux injections est une injection et que la composée de deux surjections est une surjection.

**Exercice 15.** Soit $E,\ F$ deux ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f = Id_E$, alors $g$ est surjective et $f$ est injective.
2. Montrer que si $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bijectives, alors $f$ et $g$ sont bijectives.

**Exercice 16.** Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective et $f$ surjective alors $g$ est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et $g$ injective alors $f$ est surjective.

**Exercice 17.** Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications. On considère l'application $h$ définie par

$$h : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & F \times G \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)). \end{array} \right.$$

1. Montrer que : ($f$ est injective ou $g$ est injective) $\Rightarrow$ ($h$ injective de $E$ dans $F \times G$).
2. On suppose que $f$ est surjective de $E$ dans $F$ et que $g$ est surjective de $E$ dans $G$. L'application $h$ est-elle nécessairement surjective de $E$ dans $F \times G$ ?

**Exercice 18.** Soit $E$ un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que $f$ est injective si et seulement si $f$ est surjective.