

# TD 13 : Equations différentielles

## I Équations différentielles linéaires du premier ordre

**Exercice 1.** Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle indiqué

1.  $y' - 2y = x + x^2$  sur  $\mathbb{R}$
2.  $3y' - 2y = x$  sur  $\mathbb{R}$
3.  $y' = y + 1$  sur  $\mathbb{R}$
4.  $y' = -y + e^x$  sur  $\mathbb{R}$

**Exercice 2.** Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle indiqué

1.  $(1 + x^2)y' + 2xy = 1$  sur  $\mathbb{R}$
2.  $x^2y' - y = e^{-\frac{1}{x}}$  sur  $\mathbb{R}^{+\ast}$
3.  $xy' - (1 + 2x)y = -x^2e^x$  sur  $\mathbb{R}^{+\ast}$
4.  $y' - 2xy = -(2x - 1)e^x$  sur  $\mathbb{R}$
5.  $y' - \frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)}y = 2$
6.  $y' + \cos^3(x)y = 0$  sur  $\mathbb{R}$
7.  $y' + \frac{2}{x^2 - 1}y = x$  sur  $]1, +\infty[$

**Exercice 3.** Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes

1.  $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$
2.  $y' + \frac{1 - 2x}{x^2}y = 1$
3.  $y' - y = x^2(e^x + e^{-x})$
4.  $xy' + (1 - 2x)y = 1$
5.  $x^3y' + 4(1 - x^2)y = 0$
6.  $(1 - x^2)y' - 2xy = 1$
7.  $(\tan x)y' + y - \sin x = 0$
8.  $y' + (\tan x)y = \sin x + \cos^3 x$
9.  $x^2y' - y = x^2 - x + 1$ . On pourra chercher une solution particulière polynomiale.

**Exercice 4.** Problèmes de raccords de solutions définies sur des intervalles disjoints :

1. On considère l'équation différentielle (E) :  $xy' + y = 1$ . Résoudre (E) sur  $\mathbb{R}^{+\ast}$  puis sur  $\mathbb{R}^{-\ast}$ . Montrer que (E) admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ .
2. On considère l'équation différentielle (E) :  $(1 - x^2)y' - 2xy = x^2$ . Résoudre (E) sur chaque intervalle où cela a un sens, puis étudier les éventuels raccords.
3. On considère l'équation différentielle (E) :  $(x \ln x)y' - y = 0$ . Résoudre (E) sur chaque intervalle où cela a un sens, puis étudier les éventuels raccords.
4. Étude des solutions sur  $\mathbb{R}^{+\ast}$ ,  $\mathbb{R}^{-\ast}$  et sur  $\mathbb{R}$  de (E) :  $xy' + 2y = \frac{x}{1 + x^2}$ .

**Exercice 5.** Résoudre les problèmes de Cauchy suivants en précisant à chaque fois l'intervalle de travail (mais sans étudier les problèmes de raccord) :

1.  $y' \cos x - y \sin x = 0$  et  $y(0) = 1$
2.  $y' + xy = 2x$  et  $y(0) = 1$

## II Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

**Exercice 6.** Résoudre les équations différentielles suivantes

1.  $y'' + 4y' + 4y = x^2e^x$
2.  $y'' + 4y' + 4y = x^2e^{-2x}$
3.  $y'' + 4y' + 4y = \sin xe^{-2x}$
4.  $y'' - 6y' + 9y = e^x$
5.  $y'' - 2y' + 2y = x^2 + x$
6.  $2y'' - y' - y = e^x + e^{-x}$
7.  $y'' - 2y' + 3y = \cos x$
8.  $4y'' + 4y' + y = x + x^2 + 3 \sin x + e^{3x} + xe^{-\frac{x}{2}}$
9.  $y'' - my + y = 0$  avec  $m \in \mathbb{R}$
10.  $y'' + y = x^2 \cos x$
11.  $y'' + y = \cos x + \sin(2x)$

**Exercice 7.** Résoudre les équations différentielles suivantes, puis déterminer l'unique solution vérifiant  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 1$ .

1.  $y'' + 8y' + 15y = 5$

3.  $y'' - 2y' + 5y = 5$

2.  $4y'' - 4y' + y = 4$

4.  $y'' - 2y' = 2$

**Exercice 8.** On considère un paramètre réel  $m$ . Résoudre l'équation différentielle suivante en discutant selon les valeurs de  $m$  :

$$y'' - (m + 1)y' + my = e^x - x - 1.$$

**Exercice 9.** Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1.  $y'' - 4y' + 5y = e^x$  avec  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$

2.  $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}$  avec  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 1$

### III Quelques problèmes issues de la physique chimie

---

#### III. 1 Equations d'ordre 1

---

##### Exercice 10. Cinétique chimique

On considère la réaction chimique d'équation bilan :  $2N_2O_5 \rightarrow 4NO_2 + O_2$ . Cette réaction a une cinétique d'ordre 1, c'est-à-dire que la vitesse de disparition du pentaoxyde de diazote, définie par  $v = -\frac{1}{2} \frac{d[N_2O_5]}{dt}$  vérifie l'équation :  $v = k[N_2O_5]$ .

En posant  $y(t) = [N_2O_5](t)$ , et en notant  $c_0 = y(0)$ , donner l'expression exacte de la vitesse de disparition du pentaoxyde de diazote, et tracer sa courbe.

##### Exercice 11. Loi de Fick

Une cellule est plongée dans une solution de potassium de concentration  $c_p$ . On note  $c(t)$  la concentration de potassium dans la cellule à l'instant  $t$ , et on suppose que  $c(0) = 0$ . D'après la loi de Fick, la vitesse de variation de la concentration de potassium dans la cellule est proportionnelle au gradient de concentration  $c_p - c(t)$ , c'est-à-dire qu'il existe une constante  $\tau$  homogène à un temps telle que

$$c'(t) = \frac{c_p - c(t)}{\tau}.$$

Déterminer  $c(t)$  et tracer le graphe de  $c$ .

##### Exercice 12. Datation au carbone 14.

La vitesse de désintégration du carbone 14 est proportionnelle à sa quantité présente dans le matériau considéré. Ainsi, si on note  $y(t)$  le nombre d'atomes de carbone 14 présents dans un échantillon de matière organique à l'année  $t$ ,  $y$  vérifie l'équation différentielle

$$y'(t) = -ky(t),$$

où  $k = 1.238 \times 10^{-4} \text{an}^{-1}$  est la constante de désintégration du carbone 14.

1. Calculer l'expression explicite de  $y(t)$  en fonction du nombre  $N_0$  d'atomes de carbone 14 à l'instant  $t = 0$ .
2. On appelle demi-vie d'un élément radioactif le temps au bout duquel la moitié de ses atomes se sont désintégrés. Déterminer la demi-vie du carbone 14.
3. Lors de fouilles, on a découvert un fragment d'os dont la teneur en carbone 14 vaut 70% de celle d'un os actuel de même masse. Estimer l'âge de ces fragments.

#### III. 2 Equations d'ordre 2

---

**Exercice 13. 1. Circuit RC**

On place en série un condensateur de capacité  $C$  et une résistance  $R$ , alimentés par un générateur de force électromotrice  $V$ . La charge  $q(t)$  du condensateur vérifie alors l'équation

$$q'(t) + \frac{1}{RC}q(t) = \frac{V}{R}.$$

Calculer l'expression explicite de  $q$ , sachant que la charge initiale est nulle, et tracer le graphe de  $q$ .

**2. Circuit LC**

On place en série un condensateur de capacité  $C$  et une bobine d'inductance  $L$ , alimentés par un générateur de force électromotrice  $V$ . La charge  $q(t)$  du condensateur vérifie alors l'équation

$$q''(t) + \frac{1}{LC}q(t) = \frac{V}{L}.$$

Calculer l'expression explicite de  $q$ , sachant que la charge initiale est nulle et que  $q'(0) = 0$ , et tracer le graphe de  $q$ .