

TD 12 Matrices

I Calculs : opérations élémentaires sur les matrices

Exercice 1. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1. Calculer, lorsque cela est possible, $A + B$, AB , BA , A^2 , AC , ${}^t B^t A$, CA , C^2 , $(C - 2I_3)^3$, XB et ${}^t BX$.
2. Résoudre l'équation, d'inconnue X : $CX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Représenter la matrice A dans les cas suivants :

1. $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $a_{ij} = \max(i, j)$
2. $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $a_{ij} = |i - j|$
3. $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $a_{ij} = 1$ si $i \leq j$, $a_{ij} = 0$ sinon.

II Puissances n-ièmes de matrice carrée

Exercice 3. Soient les deux matrices suivantes : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^3 . B est-elle inversible ?
2. Calculer les puissances n-ièmes de C .

Exercice 4. On considère la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer N^2 . Donner une relation entre N^2 , N et I_3 . N est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
2. Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, N^n = u_n N + v_n I.$$

3. En déduire u_n et v_n en fonction de n . Puis donner l'expression de N^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites de réels telles que $x_0 = y_0 = 1$ et $z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 2y_n + z_n \\ y_{n+1} = 2x_n - 3y_n + 2z_n \\ z_{n+1} = -x_n + 2y_n. \end{cases}$$

Calculer x_n , y_n et z_n en fonction de n .

Exercice 5. Soient les deux matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer des réels α et β tels que $A = \alpha I_3 + \beta J$. Calculer J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites de réels telles que $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n. \end{cases}$$

Calculer x_n , y_n et z_n en fonction de n .

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Montrer que A^n est de la forme

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

- Déterminer a_n et b_n en fonction de n .

Exercice 7. Méthode par diagonalisation :

- Soit A une matrice carrée diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe P une matrice inversible telle que $P^{-1}AP = D$ où D est diagonale.
 - Exprimer A en fonction de D .
 - Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer A^n en fonction de P , P^{-1} et D^n .
 - Montrer que A inversible si et seulement si D est inversible et, qu'on a alors : $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.
- Application : soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
 - Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1} .
 - Vérifier que M est diagonalisable et calculer la matrice diagonale associée.
 - Étudier l'inversibilité de M .
 - Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Résoudre, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le système : $(A - \lambda I_3)X = 0_{31}$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
- Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} . Calculer $P^{-1}AP$.
- En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- La matrice A est-elle inversible ?
- On considère trois suites u , v et w définies par

$$u_0 = 0, v_0 = 1, w_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n - w_n \\ v_{n+1} = v_n \\ w_{n+1} = -u_n + 2v_n + w_n. \end{cases}$$

Donner l'expression explicite de chacune de ces trois suites.

Exercice 9. Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Résoudre, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le système : $(A - \lambda I_3)X = 0_{31}$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

2. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} . Calculer $P^{-1}AP$.

3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. La matrice A est-elle inversible ?

5. On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :
$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = -u_{n+2} + 5u_{n+1} - 3u_n. \end{cases}$$

(a) On pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Donner la relation qui lie X_{n+1} , X_n et A pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n X_0$.

(c) En déduire l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

III Inversibilité de matrice carrée

Exercice 10. Étudier l'inversibilité des matrices suivantes et lorsqu'elles sont inversibles, donner leur inverse :

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 11. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Étudier l'inversibilité de A selon les valeurs prises par le paramètre $a \in \mathbb{R}$. Lorsque A est inversible, calculer son inverse en fonction de a .

Exercice 12. On considère le système
$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

1. Écrire le système sous forme matricielle.

2. En notant A la matrice associée au système, montrer que A est inversible et calculer son inverse.

3. Résoudre le système.

Exercice 13. Calcul de rang :

Déterminer, en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$, le rang de $A = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 4 & -4 \\ -1 & 5 - \lambda & -3 \\ 1 & 7 & -5 - \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 14. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et l'écrire en fonction de A et de I_3 .
2. A est-elle inversible? Si oui, calculer son inverse.

Exercice 15. Pour chacune des matrices suivantes, étudier si elle est inversible ou pas et lorsqu'elle est inversible, donner son inverse.

1. $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^4 - 4M^2 + M - 5I_3 = 0_3$.
2. $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^5 - A = 0_3$ et telle que $A^4 \neq I_3$.

Exercice 16. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - I_3)^2$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 17. Soient a, b, c, d des réels non tous nuls. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} a & -d & c & -b \\ d & a & -b & -c \\ -c & b & a & -d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit matriciel ${}^tM \times M$.
2. M est-elle inversible? Si oui, calculer M^{-1} .

Exercice 18. Inversibilité des matrices carrées d'ordre deux.

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $M^2 = (a + d)M - (ad - bc)I_2$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible et déterminer alors M^{-1} . On posera $\Delta = ad - bc$.

Exercice 19. Inversibilité des matrices de rotation.

Soit \mathcal{R} l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le produit de deux éléments de \mathcal{R} est un élément de \mathcal{R} .
2. Montrer que deux matrices de \mathcal{R} commutent.
3. Montrer que $I_2 \in \mathcal{R}$.
4. Montrer que tout élément de \mathcal{R} est inversible et que son inverse est encore dans \mathcal{R} .

IV Divers

Exercice 20. Pour toute matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, on appelle trace de A le nombre : $Tr(A) =$

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

1. Calculer la trace de la matrice nulle, de la matrice identité et de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Vérifier que $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \text{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{Tr}(A) + \mu \text{Tr}(B)$.
3. Montrer que $\forall(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
4. Les matrices A et B sont dites semblables s'il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$. Montrer que deux matrices semblables ont même trace.

Exercice 21. Commutant. On cherche à déterminer le commutant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA.$$

Cela revient à chercher les matrices A qui commutent avec toutes les autres matrices. Soit A une telle matrice.

1. Soit D une matrice diagonale d'ordre n . Expliciter AD et DA et en déduire que A est diagonale.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Expliciter MA et AM et en déduire que tous les coefficients de A sont égaux.
3. Décrire le commutant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 22. Résolution d'équation matricielle.

Déterminer toutes les matrices M carrée d'ordre deux telles que $M^2 = 0$.

V Exercices récapitulatifs

Exercice 23. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On cherche à étudier l'inversibilité de A et à calculer les puissances n -ièmes de A en utilisant les diverses méthodes vues en cours et en TD.

1. Méthode une : Par diagonalisation :
 - (a) Résoudre $(A - \lambda I_3)X = O_{31}$.
 - (b) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
 - (c) Calculer $P^{-1}AP$. En notant D cette matrice, exprimer A en fonction de P, P^{-1} et D .
 - (d) Calculer les puissances n -ièmes de A .
 - (e) Étudier l'inversibilité de A . Si A est inversible, calculer son inverse.
2. Méthode deux : Par le binôme de Newton :
 - (a) Soit $B = A - 2I_3$. Calculer B^n en fonction de B pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (b) En déduire alors les puissances n -ièmes de A .
3. Méthode trois : Lorsque l'on connaît une relation entre les puissances de la matrice :
 - (a) Montrer que : $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3$.
 - (b) Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $A^n = a_n A + b_n I_3$.
 - (c) Calculer les expressions explicites de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En déduire les puissances n -ièmes de A .
 - (d) Montrer que A est inversible et donner son inverse en fonction de A et de I_3 .
 - (e) En reprenant la question précédente, donner l'expression de A^{-n} en fonction de A et de I_3 pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 24. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 3 & -7 & 3 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$. On désigne par I_3 la matrice identité d'ordre 3 et par 0_3 la matrice nulle d'ordre 3. On se propose de calculer les puissances de A de plusieurs manières. Ainsi, les trois méthodes sont totalement indépendantes les unes des autres et aucun résultat d'une méthode précédente ne peut être utilisé dans une autre méthode.

1. **Méthode une :** On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
- Calculer $D = P^{-1}AP$ puis exprimer A en fonction de P , D et P^{-1} .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner et démontrer l'expression de A^n en fonction de P , D^n et P^{-1} . Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Étudier l'inversibilité de A et calculer A^{-1} si A est inversible.

2. **Méthode deux :**

- On pose $B = A - 2I_3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer B^n en fonction de B .
- En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de n , A et I_3 . Vérifier que l'on retrouve bien le même résultat que dans la méthode précédente.
- On définit les trois suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifient les relations

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= -x_n - 3y_n + 3z_n \\ y_{n+1} &= 3x_n - 7y_n + 3z_n \\ z_{n+1} &= 6x_n - 6y_n + 2z_n. \end{cases}$$

- Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

- En déduire, pour tout entier naturel n , une expression de x_n , y_n et z_n en fonction de n et des réels x_0 , y_0 et z_0 .
- Si $x_0 = y_0 = 1$ et $z_0 = 2$, les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont-elles convergentes ? Préciser les limites lorsqu'elles existent.

3. **Méthode trois :**

- Donner une relation entre A^2 , A et I_3 .
- La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
- Démontrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier n : $A^n = a_n A + b_n I_3$. Donner les relations de récurrence vérifiées par ces deux suites.
- En déduire l'expression de a_n et de b_n en fonction de n puis celle de A^n en fonction de n , A et I_3 . Vérifier que l'on retrouve bien le même résultat que dans les deux méthodes précédentes.
- En reprenant l'expression de l'inverse de A en fonction de A et de I_3 , calculer $A^{-n} = (A^{-1})^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.