

# Programme de colle : Semaine 14

## Lundi 16 Janvier

### I Vocabulaire des applications

1. Fonction d'un ensemble quelconque dans un autre.
2. Fonction injective, surjective, bijective.
3. Expression de la bijection réciproque.
4. Dérivée de la bijection réciproque d'une fonction réelle.
5. Etude de arctan et de sa dérivée.

### II Calcul intégral

1. Calcul d'intégrale simple.
2. Relation de Chasles.
3. Linéarité de l'intégrale.
4. Positivité de l'intégrale.
5. IPP.
6. Changement de variable (les changements de variables doivent être suggérés dans l'exercice).
7. Dériver les fonctions du type :  $x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$
8. primitive de  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

### III Informatiques

Les programmes seront écrit en Python.

1. Savoir définir une variable.
2. Savoir manipuler des conditions (`if`, `elif`, `else`)
3. Savoir écrire un script qui calcul une somme, ou les termes d'une suite ( boucle `for` )
4. Savoir écrire un script avec une boucle `while`
5. La syntaxe des fonctions a été vue et doit être sue.
6. Boucle sur des listes.
7. Bibliothèque `matplotlib.pyplot` et `numpy`.
8. Savoir tracer un graphique.

### IV Exercices Types

1. Sans utiliser la fonction `floor` de Python, écrire une fonction Python qui prend en argument un réel  $x$  l'entier  $k$  tel que  $x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi[$
2. Sans utiliser la fonction `floor` de Python, écrire une fonction Python qui prend en argument un réel  $x$  et retourne sa partie entière.
3. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier  $n$  qui simule  $n$  lancers de dé à 6 faces et retourne la somme des valeurs des lancers.
4. Tracer la fonction  $f(x) = x^3 + 3x + 1$  entre  $-1$  et  $1$  à l'aide de la bibliothèque `matplotlib.pyplot`.
5. Calculer

- $\int_0^1 e^x dx,$
- $\int_0^1 xe^x dx,$
- $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx,$
- $\int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx,$
- $\int_0^1 \frac{x-1}{(x+1)^2} dx,$

6. Etudier le sens de variation de

$$I_n = \int_1^2 x^n \ln(x) dx$$

7. Etudier la fonction définie par

$$f(x) = \int_x^{x+1} e^{(-t^2)} dt$$

8. Dire si les fonctions suivantes sont injective, surjective, bijective? Dans le dernier cas, donner la bijection réciproque.

$$— f_1 : \begin{cases} [-1, 1] & \rightarrow & [0, 1] \\ x & \mapsto & |x| \end{cases}$$

$$— f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^5 \end{cases}$$

$$— f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(2\pi x) \end{cases}$$

$$— f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, x - y) \end{cases}$$

$$— f_5 : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{i\} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{z+i}{z-i} \end{cases}$$

$$— f_6 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & ] - 1, 1[ \\ x & \mapsto & \frac{2}{\pi} \arctan(x) \end{cases}$$

9. Avec les notations précédentes. Calculer les images directes suivantes :

$$f_1([-1, 1]), \quad f_2([-1, 1]), \quad f_3([-1, 1]), \quad f_5([-1, 1]), \quad f_6([-1, 1])$$