Correction - DS 5

Exercice 1. Calculer

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{t} dt$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 x e^{2x} dx$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^4} dt$. (On pourra effectuer le changement de variable $t^2 = u$.)

Correction 1.

1. TD 10, ex 4, Q5
2. TD 10, ex 5, Q2
3. TD 10, ex 7, Q1

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (2x + y, 3x + y)$$

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
2. Justifier que pour tout $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ il existe une unique solution à l'équation d'inconnue (x, y) :

$$f(x, y) = (X, Y)$$

3. En déduire que f est bijective et donner sa bijection réciproque.

Correction 2.

1. On peut calculer le discriminant de A $(ad - bc)$ qui vaut $2 - 3 = -1 \neq 0$ donc A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

2. L'équation $f(x, y) = (X, Y)$ correspond à l'équation matricielle :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Comme A est inversible cette équation à une unique solution à savoir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X + Y \\ 3X - 2Y \end{pmatrix}$$

3. La question précédente signifie exactement que f est bijective et

$$\boxed{f^{-1} : (X, Y) \mapsto (-X + Y, 3X - 2Y)}$$

Exercice 3. 1. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$ est définie pour tout réel x.

On considère désormais la fonction f définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

2. Etablir que f est impaire. (Afin de caculer $f(-x)$, on pourra effectuer le changement de variable $t=-u$)
3. (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)=2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{4x^2+1}$.
   (c) Résoudre l'équation $\varphi(x)\geq 0$.
   (d) En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. (a) En utilisant la relation $t^2\leqslant t^2+1\leqslant t^2+2t+1$, valable pour tout t réel positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad \ln(2x+1)-\ln(x+1)\leqslant f(x)\leqslant \ln(2)$$

   (b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (c) Dresser le tableau de variation complet de f.
5. En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble à déterminer.
6. Déterminer $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$.

Correction 3.

1. La fonction $t\mapsto\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive, ainsi l'intégrale est bien définie pour tout $x\in\mathbb{R}$.
2. Soit $x\in\mathbb{R}$, calculons $f(-x)$ On a

$$f(-x)=\int_{-x}^{-2x}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

En faisant le changement de variable $u=-t$ on obtient
— $\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$.
— $dt=-du$.
— Enfin les bornes sont envoyées sur $[x,2x]$.

On a donc :

$$\begin{aligned}f(-x)&=\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}-du\\&=-\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}du\\&=-f(x)\end{aligned}$$

$$\boxed{f\text{ est impaire}}$$

3. (a) Soit G une primitive de $t\mapsto\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$, par définition G est dérivable et $f(x)=G(2x)-G(x)$. Donc

$$\boxed{f\text{ est dérivable sur }\mathbb{R}}$$

(b) On calcule la dérivée de f à l'aide de la relation précédente on obtient

$$f'(x) = 2G'(2x) - G'(x)$$

Or par défintion de G on a $G'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ Donc

$$f'(x) = 2\frac{1}{\sqrt{(2x)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

En mettant au même dénominateur on obtient

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{(2x)^2+1}\sqrt{x^2+1}}$$

$\boxed{\text{Le dénominateur étant positif le signe de } f'(x) \text{ est égal au signe de } 2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{4x^2+1}}$

(c) On résout : (E) : $\quad 2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{4x^2+1} \geq 0$ On a

$$(E) \iff 2\sqrt{x^2+1} \geq \sqrt{4x^2+1}$$

Les deux cotés de l'inégalités étant positif on peut passer au carré et on a

$$\begin{aligned}(E) &\iff 2^2(x^2+1) \geq 4x^2+1 \\ &\iff 4(x^2+1) \geq 4x^2+1 \\ &\iff 4 \geq 1\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'équation E est vérifiée

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \geq 0}$$

(d) On vient de voir que $f'(x)$ était strictement positif sur $\mathbb{R}$ donc

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$$

4. (a) A l'aide de l'encadrement donné on obtient, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+$ que pour tout $t \geq 0$:

$$\frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{t^2+1} \geq \frac{1}{t^2+2t+1}$$

et donc en prenant la racine (remarquons que $t^2+2t+1 = (t+1)^2$)

$$\frac{1}{t} \geq \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \geq \frac{1}{t+1}$$

Par croissance de l'intégrale on a alors (comme $x < 2x$ car $x > 0$)

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t}dt \geq \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt \geq \int_x^{2x} \frac{1}{t+1}dt$$

On peut alors intégrer les différents membres de l'inégalité pour obtenir :

$$[\ln(t)]_x^{2x} \geq f(x) \geq [\ln(t+1)]_x^{2x}$$

D'où

$$\ln(2x) - \ln(x) \geq f(x) \geq \ln(2x+1) - \ln(x+1)$$

ce qui donne (car $\ln(2x) - \ln(x) = \ln(2)$) :

$$\boxed{\ln(2x+1)-\ln(x+1)\leq f(x)\leq \ln(2)}$$

(b) $\ln(2x+1)-\ln(x+1)=\ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)$. Or $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+1}=2$ donc par composition de limite

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(2x+1)-\ln(x+1)=\ln(2)$$

On applique ensuite le théorème d'encadrement et on a

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ln(2)}$$

(c) On obtient le tableau de variation suivant à l'aide de l'imparité de f et de la question précédente.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\ln(2)$	$\nearrow$	$\ln(2)$

(d) f est continue (car dérivable) et strictement croissante, de plus $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ln(2)$ et $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\ln(2)$

$$\boxed{\text{Le théorème de la bijection assure que } f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]-\ln(2),\ln(2)[}$$

(e) $f(0)=\int_0^0\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt=0$ Dont

$$f^{-1}(0)=0$$

Pour calculer $(f^{-1})'(0)$ il suffit d'appliquer la formule de dérivation de la bijection réciproque :

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'\circ f^{-1}(0)}$$

On a par ailleurs : $f'\circ f^{-1}(0)=f'(f^{-1}(0))=f'(0)=2\frac{1}{\sqrt{(2\times 0)^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{\times 0)^2+1}}=1$

$$\boxed{(f^{-1})'(0)=1}$$

Exercice 4. Soit M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(M - \mathrm{Id})^2$. Donner son rang.
2. Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Exprimer Me_1, Me_2 en fonction de e_1, e_2.
3. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $Me_3 = \alpha e_2 + \beta e_3$.
4. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
5. Soit $T = P^{-1}MP$. Calculer T.
6. Montrer par récurrence que

$$T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$T^n = P^{-1}M^nP$$

8. En déduire la valeur de M^n.
9. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que $x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 2x_n + y_n \\ y_{n+1} &= y_n \\ z_{n+1} &= -x_n + z_n \end{cases}$$

   (a) On pose $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Etablir une relation entre U_n, U_{n+1} et M.

   (b) En déduire (et la prouver) une relation entre U_n U_0 et M

   (c) Donner finalement l'expression de x_n en fonction de n.

Dernier exercice page suivante.

Correction 4.

1. $M - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Donc

$$\boxed{(M-\mathrm{Id})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Le système associé est
$\left\{\begin{array}{rrr} x & +y & =0 \\ & & 0=0 \\ -x & -y & =0 \end{array}\right. \iff \left\{ \begin{array}{rr} x+y & =0 \end{array}\right.$ Il est de rang 1. Donc

$$\boxed{(M-\mathrm{Id})^2 \text{ est de rang } 1}$$

2. Le calcul montre que $Me_1 = 2e_1$ et $Me_2 = e_2$
3. Le calcul montre que $Me_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix} e_3 - e_2$

   Ainsi on peut prendre

$$\boxed{\alpha = -1 \text{ et } \beta = 1}$$

4. On considère la matrice augmentée : $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

   $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ donnent
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
   $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ donne
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
   $L_2 \leftarrow -L_2$ donne
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
   Enfin $L_2 \leftrightarrow L_3$ donne
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\boxed{P \text{ est inversible d'inverse } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

5. Le calcul donne

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

   (sur une copie, le produit intermédiaire MP serait apprécié)

6. Soit $Q(n)$ la propriété $'T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}'$

— *Initialisation* $T^0 = I_3$ et en remplacant on obtient $\begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ Donc $Q(0)$ est vraie.

— Hérédité On suppose que la propriété $Q(n)$ est vraie pour un certain entier n on a donc $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc

$$T^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le calcul donne

$$T^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La proposition $Q(n+1)$ est vraie.

— Conclusion $Q(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. On pose $P(n)$: "$T^n = P^{-1}M^nP$"

Initialisation $T^1 = T$ et $P^{-1}M^1P = P^{-1}MP = T$ d'après la définition de T. Donc $P(1)$ est vrai.

Hérédité On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a alors

$$(T)^{n+1} = T^nT$$

et donc par Hypothése de récurrence :

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= (P^{-1}M^nP)(P^{-1}MP) \\ &= (P^{-1}M^nPP^{-1}MP) \\ &= (P^{-1}M^n \operatorname{Id} MP) \\ &= (P^{-1}M^nMP) \\ &= (P^{-1}M^{n+1}P) \end{aligned}$$

Conclusion $P(n)$ est vraie pour tout n.

8. D'après la question précédente : $M^n = PT^nP^{-1}$. Tout calcul fait on obtient :

$$\boxed{M^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2^n + 1 & -2^n + 1 + n & 1 \end{pmatrix}}$$

9. (a) Le système correspond à

$$\boxed{U_{n+1} = MU_n}$$

(b) On pose $P(n)$: "$U_n = M^nU_0$"

Initialisation $P(0)$: "$U_0 = M^0U_0$" $\iff$ "$U_0 = I_3U_0$" $\iff$ "$U_0 = U_0$" donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a alors

$$U_n = M^n U_0$$

Donc $MU_n = M \times M^n U_0$ et d'après la question précédente $U_{n+1} = MU_n$ donc

$$U_{n+1} = M^{n+1} U_0$$

La propriété $P(n+1)$ est donc vérifiée.

Conclusion $P(n)$ est vraie pour tout n.

(c) Il suffit de réaliser la multiplication entre M^n et U_0. On obtient

$$x_n = 2^n - 2(2^n - 1) + 1 \times 0 = -2^n + 2$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, x_n = -2^n + 2}$$

Exercice 5. 1. On considère la chaine de caractère `ch = "1234"`.

(a) Quel est le type de `ch[0]` ? Quelle est sa valeur ?

(b) Quel est le type de `int(ch[3])` ? Quelle est sa valeur ?

(c) Quel est le type de `"1" + str(2)` ? Quelle est sa valeur ?

2. Écrire une fonction `StringToList` qui prend comme argument d'entrée une chaine de caractères représentant un nombre entier positif (de longueur quelconque) et qui renvoie la liste des chiffres qui composent l'entier représenté par la chaine de caractères.

   Par exemple, l'instruction `StringToList("1234")` *renverra la liste d'entiers* `[1, 2, 3, 4]`.

3. Écrire une fonction `distribution` qui, à partir d'une liste d'entiers compris entre 0 et 9, renvoie une liste `L` telle que, pour tout $i \in [\![0, 9]\!]$, `L[i]` contienne le nombre d'entiers `i` dans la liste passée en argument.

   Par exemple, `distribution([4, 7, 7, 1])` r*enverra la liste* `[0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0]`.

4. On considère une fonction `NbEntiersCommuns` qui renvoie le nombre d'entiers en commun (mais pas nécessairement placés aux même endroit) dans deux listes d'entiers (compris entre 0 et 9) passées en argument.

   Par exemple, `NbEntiersCommuns([4, 7, 7, 1], [4, 4, 7, 7])` *renverra* 3.

   Parmis les fonctions suivantes, indiquer (sans justifier) l'unique fonction qui correspond à celle décrite ci-dessus.

```python
def NbEntiersCommuns1(L,M) :
    s = 0
    for k in range(len(L)) :
        s += min(L[k], M[k])
    return s
```

```python
def NbEntiersCommuns3(L,M) :
    nb = 0
    for k in range(len(L)) :
        i = 0
        while i < len(M) :
            if L[k] == M[i] :
                nb = nb + 1
    return nb
```

```python
def NbEntiersCommuns2(L,M) :
    nb = 0
    dL = distribution(L)
    dM = distribution(M)
    for k in range(10) :
        nb += max(dL[k], dM[k])
    return nb
```

```python
def NbEntiersCommuns4(L,M) :
    s = 0
    dL = distribution(L)
    dM = distribution(M)
    for k in range(10) :
        s += max(dL[k], dM[k])
    return s
```