TD 14 : Géométrie

I Produit scalaire

Exercice 1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

1. Démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}-\vec{v}\|$.
2. Déduire de la question précédente, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un parallélogramme $ABCD$ soit rectangle.

Exercice 2. Soit ABC un triangle non plat du plan.

1. Démontrer que, pour tout point M du plan, on a $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$.
2. Soit H le point d'intersection des hauteurs issues de B et C.
   Montrer que $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0$ et en déduire que H appartient à la hauteur issue de A.

Exercice 3. Formule d'Al Kachi.
On considère un triangle ABC. On note $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ les mesures respectives des angles non orientés $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ et l'on pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

1. Démontrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$ et énoncer deux autres formules similaires. Qu'obtient-on si $\hat{A} = \dfrac{\pi}{2}$?
2. Si $a = 4$, $b = 3$ et $c = 2$, calculer une valeur approchée (à 10^{-2} degré près) de $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$.
3. Si $\hat{A} = \dfrac{\pi}{6}$, $a = 3$ et $c = 2$, calculer b.

II Géométrie et nombres complexes

Exercice 4. Déterminer géométriquement les complexes z vérifiant les relations suivantes. Vérifier votre résultat par un calcul.

1. $|z-1-i| = |z+1+i|$
2. $(|z-i|-1)(|z+1|-2) = 0$
3. $\dfrac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R}_+^\star$

III Géométrie du plan

Exercice 5. Déterminer l'intersection de $\mathcal{D} : 2x + 5y - 10 = 0$ et de la droite $\mathcal{D}'$ passant par $A(-1, 2)$ et dirigée par $\vec{u}(3, 2)$.

Exercice 6. Déterminer l'équation de la droite D passant par $A = (2, 1)$ et $B = (1, -2)$. Donner un vecteur directeur de D et une équation paramétrique de D.

Exercice 7. 1. Déterminer les éventuels points d'intersection de la droite $\mathcal{D} : x + 3y - 4 = 0$ et du cercle $\mathcal{C}_k : x^2 + y^2 - 6y + k = 0$ pour $k = 4$, $k = \frac{13}{2}$ et $k = 8$.

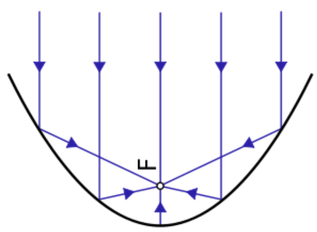
2. Déterminer les éventuels points d'intersection des cercles $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 6y + 4 = 0$ et $\mathcal{C}' : x^2 + y^2 + x - 3y = 0$.
3. On considère l'ensemble $\mathcal{C}'_k : x^2 + y^2 - 4x + 2y + k = 0$.
   Déterminer sa forme géométrique en fonction de la valeur de k.

Exercice 8. 1. Déterminer l'équation du cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[AB]$ où $A(3, 1)$ et $B(7, -1)$.
2. La partie $\mathcal{C}_2$ du plan définie par l'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 8x + y + 10 = 0$ est-elle un cercle ?
   Si oui, donner son centre et son rayon.
3. Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Exercice 9. Soit A et B de coordonnées : $A = (1, 2)$ et $B = (2, 3)$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega = (2, 0)$ et de rayon 1. Pour tout point M du cercle on considère le triangle ABM.
Quel est le point du cercle qui minimise l'aire de ce triangle ?

Exercice 10. Soit A, B et C trois points du plan de coordoonées respectives $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ et $C = (2, 2)$.
1. Donner l'équation des trois médianes et montrer qu'elles s'intersectent en un seul point.
2. Faire de même avec les médiatrices.
   On appelle O l'interesction des trois médiatrices
3. Donner l'équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon OA.
4. Montrer que B et C appartiennent à $\mathcal{C}$.

Exercice 11. On considère un miroir parabolique. Montrer que tous les rayons venant de l'infini se réfléchissant sur le miroir s'intersectent en un même point.



IV Géométrie de l'espace

Exercice 12. 1. Déterminer l'équation du plan P qui passe par les points A, B, C de coordonnées respectives : $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 2, 3)$ et $C = (-1, 0, -2)$.
2. Donner deux vecteurs non colinéaires et paralléles à P
3. Soit D de coordonnées $(1, 2, 3)$. Est ce que D appartient à P ?
4. Donner H le projeté orthogonal de D sur H.

Exercice 13. On considère les plans $\mathcal{P} : x - y + z = 1$ et $\mathcal{P}' : x + 2y + 3z = 6$.
Justifier que $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est une droite, que l'on appellera $\mathcal{D}$. Déterminer un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Exercice 14. Déterminer la droite $\mathcal{D}$ contenant le point $A = (2, 1, 3)$ parallèle au plan d'équation $x + y + z = 2$ et rencontrant la droite $\mathcal{D}'$ d'équations cartésiennes $x = 1$ et $y = z$.