# Correction TD 14 : Géométrie

## I Produit scalaire

**Correction 1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.**

1. **Démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}-\vec{v}\|$.**
On calcule :
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$
$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$
Donc :
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 4\vec{u}\cdot\vec{v}$$
Comme $\|\vec{u}+\vec{v}\| \in \mathbb{R}_+$, $\|\vec{u}-\vec{v}\| \in \mathbb{R}_+$ et $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on résout :
$$(\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}-\vec{v}\|) \iff \left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right) \iff \left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 0\right) \iff (4\vec{u}\cdot\vec{v} = 0)$$
$$\iff (\vec{u}\cdot\vec{v} = 0) \iff (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux})$$
Conclusion :
$$\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux si et seulement si } \|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}-\vec{v}\|.}$$

2. **Déduire de la question précédente, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un parallélogramme $ABCD$ soit rectangle.**
Faites un dessin pour voir de quoi vous parlez !
Soit $ABCD$ un parallélogramme. On résout :
$$(ABCD \text{ est un rectangle}) \iff \left(\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AD} \text{ sont orthogonaux}\right) \iff \left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right\|\right)$$
$$\iff \left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}\right\|\right) \iff \left(\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{DB}\right\|\right) \iff (AC = DB)$$
Conclusion :
$$\boxed{ABCD \text{ est un rectangle, si et seulement si ses diagonales sont de même longueur.}}$$

**Correction 2. Soit $ABC$ un triangle non plat du plan.**

1. **Démontrer que, pour tout point $M$ du plan, on a $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$.**
Soit $M$ un point du plan. On calcule :
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{CA} + \left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{BB}\right) + \left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AB} \\
&= 0+0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

2. **Soit $H$ le point d'intersection des hauteurs issues de $B$ et $C$.**
**Montrer que $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0$ et en déduire que $H$ appartient à la hauteur issue de $A$.**
Soit $H$ le point d'intersection des hauteurs issues de $B$ et $C$.
• $H$ appartient à la hauteur issue de $B$ donc les droites $(HB)$ et $(CA)$ sont perpendiculaires, donc :
$$\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = 0$$

• $H$ appartient à la hauteur issue de $C$ donc les droites $(HC)$ et $(AB)$ sont perpendiculaires, donc :
$$\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$$
On en déduit, en appliquant **1** : $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$, donc $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} + 0 + 0 = 0$, donc $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0$, donc les droites $(HA)$ et $(BC)$ sont perpendiculaires, donc $H$ appartient à la hauteur issue de $A$.

**Correction 3.** Formule d'Al Kachi.
**On considère un triangle $ABC$. On note $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ les mesures respectives des angles non orientés $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ et l'on pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.**

1. **Démontrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$ et énoncer deux autres formules similaires. Qu'obtient-on si $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$ ?**
   On calcule :
   $$a^2 = BC^2 = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = c^2 + b^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = c^2 + b^2 - 2bc\cos(\hat{A})$$
   De même : $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos(\hat{B})$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C})$.
   Si $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$, donc si le triangle $ABC$ est rectangle en $A$, on obtient $\cos(\hat{A}) = 0$, donc :
   $a^2 = b^2 + c^2$ : c'est le théorème de Pythagore.
2. **Si $a = 4$, $b = 3$ et $c = 2$, calculer une valeur approchée (à $10^{-2}$ degré près) de $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$.**
   $\cos(\hat{A}) = \dfrac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = -\dfrac{1}{4}$, et $\hat{A} \in [0; \pi]$ (angle non orienté), donc $\hat{A} = \arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right) \approx 104,48°$.
   $\cos(\hat{B}) = \dfrac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \dfrac{11}{16}$, et $\hat{B} \in [0; \pi]$ (angle non orienté), donc $\hat{B} = \arccos\left(\dfrac{11}{16}\right) \approx 46,57°$.
   $\cos(\hat{C}) = \dfrac{-c^2 + a^2 + b^2}{2ab} = \dfrac{21}{24}$, et $\hat{C} \in [0; \pi]$ (angle non orienté), donc $\hat{C} = \arccos\left(\dfrac{21}{24}\right) \approx 28.96°$.
   Remarque : on peut vérifier que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \approx 180°$ (à $0,01°$ près).
3. **Si $\hat{A} = \frac{\pi}{6}$, $a = 3$ et $c = 2$, calculer $b$.**
   $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos(\hat{A})$, donc $b^2 - 2bc\cos(\hat{A}) + c^2 - a^2 = 0$, donc $b^2 - 2\sqrt{3}\,b - 5 = 0$.
   Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = 32 = \left(4\sqrt{2}\right)^2$, donc :
   $b = \dfrac{2\sqrt{3} + 4\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$ ou $b = \dfrac{2\sqrt{3} - 4\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} - 2\sqrt{2}$.
   Or $b \geq 0$ (c'est une longueur), donc
   $$\boxed{b = \sqrt{3} - 2\sqrt{2}}$$
   .

# II Géométrie et nombres complexes

**Correction 4.** **Déterminer géométriquement les complexes $z$ vérifiant les relations suivantes. Vérifier votre résultat par un calcul.**

1. $|\mathbf{z - 1 - i}| = |\mathbf{z + 1 + i}|$ :
   Soit $A$, $B$ et $M$ les points d'affixes $1 + i$, $-1 - i$ et $z$. On a :
   $$|z - 1 - i| = |z + 1 + i| \Leftrightarrow AM = BM,$$
   donc l'ensemble des points cherchés est
   $$\boxed{\text{la médiatrice du segment } [AB].}$$

On retrouve ce résultat par le calcul. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = x + iy$. On a alors :

$$\begin{aligned}
|z-1-i| = |z+1+i| &\Leftrightarrow |x+iy-1-i| = |x+iy+1+i| \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} \\
&\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 = (x+1)^2+(y+1)^2 \qquad \text{car les termes sont positifs} \\
&\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1 = x^2+2x+1+y^2+2y+1 \\
&\Leftrightarrow y = -x
\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble solution est

$$\boxed{\text{la droite d'équation } y = -x}$$

.

2. $\mathbf{(|z-i|-1)(|z+1|-2) = 0}$ :
Soit $A$, $B$ et $M$ les points d'affixes $i$, $-1$ et $z$. On a :

$$\begin{aligned}
(|z-i|-1)(|z+1|-2) = 0 &\Leftrightarrow |z-i|-1 = 0 \text{ ou } |z+1|-2 = 0 \\
&\Leftrightarrow AM = 1 \text{ ou } BM = 2
\end{aligned},$$

donc l'ensemble des points cherchés est

$$\boxed{\text{la réunion des cercles } \mathcal{C}(A,1) \text{ et } \mathcal{C}(B,2).}$$

On retrouve ce résultat par le calcul. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = x + iy$. On a alors :

$$\begin{aligned}
|z-i|-1 = 0 \text{ ou } |z+1|-2 = 0 &\Leftrightarrow |x+iy-i| = 1 \text{ ou } |x+iy+1| = 2 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} = 1 \text{ ou } \sqrt{(x+1)^2+y^2} = 2 \\
&\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 = 1 \text{ ou } (x+1)^2+y^2 = 4 \qquad \text{car les termes sont positifs}
\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble solution est bien la réunion des deux cercles trouvés précédemment.

3. $\mathbf{\dfrac{z-1}{z-i}} \in \mathbb{R}_+^\star$ :Soit $A$, $B$ et $M$ les points d'affixes $i$, $1$ et $z$. On a :

$$\frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R}_+^\star \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^\star, \frac{z-1}{z-i} = \lambda$$

$$\begin{aligned}
\frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R}_+^\star &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^\star, \frac{z-1}{z-i} = \lambda \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^\star, z-1 = \lambda(z-i) \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^\star, \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{BM}
\end{aligned},$$

donc l'ensemble des points cherchés est l'ensemble des points de la droite $(AB)$ pour lesquels les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires de même sens (car $\lambda > 0$). On obtient

$$\boxed{\text{la réunion de deux demi-droites.}}$$

On retrouve ce résultat par le calcul. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = x + iy$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que

$$\begin{aligned}
z-1 = \lambda(z-i) &\Leftrightarrow x+iy-1 = \lambda(x+iy-i) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 &= \lambda x \\ y &= \lambda(y-1) \end{cases} \\
&\qquad \text{par identification des parties réelles et imaginaires} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= \dfrac{x-1}{x} \\ y &= \dfrac{x-1}{x}(y-1) \end{cases} \qquad \text{car } x = 0 \text{ n'est pas solution}
\end{aligned}$$

La dernière équation donne : $xy = (x-1)(y-1) \Leftrightarrow xy = xy - x - y + 1 \Leftrightarrow y = -x + 1$. De plus, on a : $\lambda > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[$. Ainsi l'ensemble solution est bien la réunion des deux demi-droites trouvées précédemment.

# III Géométrie du plan

**Correction 5.** **Déterminer l'intersection de $\mathcal{D} : 2x + 5y - 10 = 0$ et de la droite $\mathcal{D}'$ passant par $A(-1, 2)$ et dirigée par $\vec{u}(3, 2)$.**

$\mathcal{D}'$ a pour équation paramétrique : $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -1 + 3\lambda \\ y & = & 2 + 2\lambda \end{array} \right.$.

Soit $M(x, y)$ un point du plan. On résout :

$$\begin{aligned}
(M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}') &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -1 + 3\lambda \\ y & = & 2 + 2\lambda \\ 2x + 5y - 10 & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -1 + 3\lambda \\ y & = & 2 + 2\lambda \\ -2 + 6\lambda + 10 + 10\lambda - 10 & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -1 + 3\lambda \\ y & = & 2 + 2\lambda \\ \lambda = 1/8 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -5/8 \\ y & = & 9/4 \end{array} \right. \iff M\left(-\tfrac{5}{8}; \tfrac{9}{4}\right)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Les droites } \mathcal{D} \text{ et } \mathcal{D}' \text{ se coupent en un unique point } M_0\left(-\frac{5}{8}; \frac{9}{4}\right).}$$

**Correction 6.** A venir.

**Correction 7.**

1. **Déterminer les éventuels points d'intersection de la droite $\mathcal{D} : x + 3y - 4 = 0$ et du cercle $\mathcal{C}_k : x^2 + y^2 - 6y + k = 0$ pour $k = 4$, $k = \frac{13}{2}$ et $k = 8$.**
   Commencez par tracer la droite $\mathcal{D}$ et les trois cercles, pour voir ce qu'il se passe.
   $(M(x, y) \in \mathcal{C}_k) \iff x^2 + y^2 - 6y + k = 0 \iff x^2 + (y^2 - 2 \times 3y + 3^2) - 3^2 + k = 0$
   $\iff x^2 + (y-3)^2 = 9 - k \iff \Omega M^2 = 9 - k$, en posant $\Omega(0, 3)$.
   Donc :
   - pour tout $k < 9$, $(M(x, y) \in \mathcal{C}_k) \iff \Omega M = \sqrt{9-k}$. $\mathcal{C}_k$ est le cercle de centre $\Omega(0, 3)$ et de rayon $\sqrt{9-k}$ ;
   - pour $k = 9$, $(M(x, y) \in \mathcal{C}_k) \iff \Omega M = 0 \iff M = \Omega$. $\mathcal{C}_k$ est réduit au point $\Omega(0, 3)$ ;
   - pour tout $k > 9$, l'équation n'a pas de solution et $\mathcal{C}_k$ est vide.

   Soit $M(x, y)$ un point du plan. On résout :

   $$(M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}_k) \iff \begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6y + k = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3y + 4 \\ (-3y + 4)^2 + y^2 - 6y + k = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3y + 4 \\ 10y^2 - 30y + 16 + \end{cases}$$

   Le discriminant de l'équation du second degré vaut $\Delta = 900 - 40(16 + k) = 260 - 40k$.

   (a) Premier cas : $k = 4$. Alors $\Delta = 100$, donc $\Delta > 0$ et :

   $$(M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}_k) \iff \begin{cases} x = -3y + 4 \\ y = \frac{30-10}{20} \text{ ou } y = \frac{30+10}{20} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

   Donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}_k$ ont exactement deux points d'intersection : $M_1\,(1, 1)$ et $M_2\,(-2, 2)$.

(b) Second cas : $k=\frac{13}{2}$. Alors $\Delta=0$ et :

$$(M\in\mathcal{D}\cap\mathcal{C}_k)\iff\begin{cases}x=-3y+4\\ y=\frac{30}{20}\end{cases}\iff\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\ y=\frac{3}{2}\end{cases}$$

Donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}_k$ ont exactement un point d'intersection : $M_0\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$.
La droite $\mathcal{D}$ est tangente au cercle $\mathcal{C}_k$ au point $M_0$. Donc en ce point elle est perpendiculaire au rayon.

(c) Troisième cas : $k=8$. Alors $\Delta=-60$, donc $\Delta<0$ et l'équation de degré 2 n'admet aucune solution réelle.
Donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}_k$ n'ont aucun point d'intersection.

Remarque : Pour toutes les valeurs de $k$ strictement inférieures à $\frac{13}{2}$, on a $\Delta>0$ et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}_k$ ont exactement deux points d'intersection.
Pout toutes les valeurs de $k$ strictement supérieures à $\frac{13}{2}$, on a $\Delta<0$ et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}_k$ n'ont aucun point d'intersection.

2. **Déterminer les éventuels points d'intersection des cercles $\mathcal{C}: x^2+y^2-6y+4=0$ et $\mathcal{C}': x^2+y^2+x-3y=0$.**
Commencez par tracer les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, pour voir ce qu'il se passe.
• $(M(x,y)\in\mathcal{C})\iff x^2+y^2-6y+4=0\iff x^2+(y-3)^2=5\iff \Omega M^2=5\iff \Omega M=\sqrt{5}$, en posant $\Omega(0,3)$.
Donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(0,3)$ et de rayon $\sqrt{5}$.
• $\big(M(x,y)\in\mathcal{C}'\big)\iff x^2+y^2+x-3y=0\iff (x^2+x+\dfrac{1}{4})-\dfrac{1}{4}+(y^2-3y+\dfrac{9}{4})-\dfrac{9}{4}=0$
$\iff (x+\dfrac{1}{2})^2+(y-\dfrac{3}{2})^2=\dfrac{5}{2}\iff \Omega'M^2=\dfrac{5}{2}\iff \Omega'M=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$, en posant $\Omega'(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$.
Donc $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre $\Omega'(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ et de rayon $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.
Soit $M(x,y)$ un point du plan. On résout :

$$\big(M\in\mathcal{C}\cap\mathcal{C}'\big)\iff\begin{cases}x^2+y^2-6y+4=0\\ x^2+y^2+x-3y=0\end{cases}\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\iff}\begin{cases}x^2+y^2-6y+4=0\\ x+3y-4=0\end{cases}\iff(M\in\mathcal{D}\cap\mathcal{C}_4)$$

Donc d'après **1** : $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont exactement deux points d'intersection : $M_1\,(1,1)$ et $M_2\,(-2,2)$.

3. **On considère l'ensemble $\mathcal{C}'_k: x^2+y^2-4x+2y+k=0$.**
**Déterminer sa forme géométrique en fonction de la valeur de $k$.**
Soit $M(x,y)$ un point du plan. On résout :

$$\big(M\in\mathcal{C}'_k\big)\iff x^2+y^2-4x+2y+k=0\iff(x^2-4x+4)-4+(y^2+2y+1)-1+k=0\iff(x-2)^2+(y+1)^2=$$

En posant $\Omega(2,-1)$, on obtient :

$$\big(M\in\mathcal{C}'_k\big)\iff \Omega M^2=5-k$$

Donc :
• pour tout $k<5$, $(M\in\mathcal{C}'_k)\iff \Omega M=\sqrt{5-k}$. $\mathcal{C}'_k$ est le cercle de centre $\Omega(2,-1)$ et de rayon $\sqrt{5-k}$ ;
• pour $k=5$, $(M\in\mathcal{C}'_k)\iff \Omega M=0\iff M=\Omega$. $\mathcal{C}'_k$ est réduit au point $\Omega(2,-1)$ ;
• pour tout $k>5$, l'équation n'a pas de solution et $\mathcal{C}'_k$ est vide.

## Correction 8.

1. **Déterminer l'équation du cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[AB]$ où $A(3,1)$ et $B(7,-1)$.**
Le cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[AB]$ aura pour centre le milieu du segment $[AB]$, i.e. le point $\Omega(5,0)$, et pour rayon $R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{4^2+(-2)^2}}{2}=\sqrt{5}$.
Il aura donc pour équation : (point de repère : $\Omega M^2=5$)

$$\boxed{(x-5)^2+y^2=5}$$

2. **La partie $\mathcal{C}_2$ du plan définie par l'équation cartésienne $x^2+y^2-8x+y+10=0$ est-elle un cercle ? Si oui, donner son centre et son rayon.**
Soit $M(x,y)$ un point du plan. On résout :

$$(M\in\mathcal{C}_2) \iff x^2+y^2-8x+y+10=0 \iff (x^2-8x+16)-16+\left(y^2+y+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+10=0$$

Donc, en posant $\Omega\left(4,-\frac{1}{2}\right)$, on a :

$$(M\in\mathcal{C}_2) \iff (x-4)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4} \iff \Omega M^2=\frac{25}{4} \iff \Omega M=\frac{5}{2}$$

Donc $\mathcal{C}_2$ est le cercle de centre $\Omega\left(4,-\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{5}{2}$.

3. **Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.**
Commencez par tracer $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ dans le plan pour voir de quoi il s'agit.
Soit $M(x,y)$ un point du plan. On résout :

$$(M\in\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2) \iff \begin{cases}(x-5)^2+y^2=5\\ x^2+y^2-8x+y+10=0\end{cases} \iff \begin{cases}x^2+y^2-10x+20=0\\ x^2+y^2-8x+y+10=0\end{cases}$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\iff} \begin{cases}x^2+y^2-10x+20=0\\ 2x+y-10=0\end{cases} \iff \begin{cases}x^2+(-2x+10)^2-10x+20=0\\ y=-2x+10\end{cases} \iff \begin{cases}5x^2-50x+120=\\ y=-2x+10\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x^2-10x+24=0\\ y=-2x+10\end{cases} \iff \begin{cases}x=\frac{10-\sqrt{4}}{2} \text{ ou } x=\frac{10+\sqrt{4}}{2}\\ y=-2x+10\end{cases} \iff \begin{cases}x=4\\ y=2\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x=6\\ y=-2\end{cases}$$

Donc $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont deux points d'intersection : $M_1(4,2)$ et $M_2(6,-2)$.

**Correction 9.** A venir.

**Correction 10.** A venir.

**Correction 11.** A venir.

# IV Géométrie de l'espace

**Correction 12.** A venir.

**Correction 13.** **On considère les plans $\mathcal{P}: x-y+z=1$ et $\mathcal{P}': x+2y+3z=6$. Justifier que $\mathcal{P}\cap\mathcal{P}'$ est une droite, que l'on appellera $\mathcal{D}$. Déterminer un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.**
Le plan $\mathcal{P}$ admet $\vec{n}(1,-1,1)$ comme vecteur normal. Le plan $\mathcal{P}'$ admet $\vec{n'}(1,2,3)$ comme vecteur normal. $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires, donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ne sont pas parallèles. Donc leur intersection est une droite $\mathcal{D}$.
Pour trouver un vecteur directeur, on cherche une équation paramétrique de $\mathcal{D}$ (sachant qu'on en a une équation cartésienne).
Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace. On résout :

$$(M\in\mathcal{D}) \iff \begin{cases}x-y+z=1\\ x+2y+3z=6\end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\iff} \begin{cases}x-y+z=1\\ 3y+2z=5\end{cases} \iff \begin{cases}x=\frac{8}{3}-\frac{5}{3}z\\ y=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}z\\ z=z\end{cases}$$

On obtient donc une équation paramétrique de $\mathcal{D}$ : $\begin{cases}x=\frac{8}{3}-\frac{5}{3}\lambda\\ y=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\lambda\\ z=0+\lambda\end{cases} \iff \begin{cases}x-\frac{8}{3}=-\frac{5}{3}\lambda\\ y-\frac{5}{3}=-\frac{2}{3}\lambda\\ z-0=\lambda\end{cases} \iff$

$\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}$,

en posant $A\left(\frac{8}{3},\frac{5}{3},0\right)$ et $\vec{u}\left(-\frac{5}{3},-\frac{2}{3},1\right)$.
Donc

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ passe par le point } A\left(\frac{8}{3},\frac{5}{3},0\right) \text{ et est dirigée par le vecteur } \vec{u}\left(-\frac{5}{3},-\frac{2}{3},1\right).}$$

**Correction 14. Déterminer la droite $\mathcal{D}$ contenant le point $A=(2,1,3)$ parallèle au plan d'équation $x+y+z=2$ et rencontrant la droite $\mathcal{D}'$ d'équations cartésiennes $x=1$ et $y=z$.**

Rassemblons les informations que l'on a :
• $\mathcal{D}$ passe par le point $A=(2,1,3)$ ; il ne manque qu'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ pour avoir déterminé cette droite.
Appelons $\vec{u}(a,b,c)$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ ($\vec{u}\neq\vec{0}$; on va le déterminer à un facteur près).
On aura pour équation paramétrique de $\mathcal{D}$ :

$$\begin{cases} x=2+a\lambda \\ y=1+b\lambda \\ z=3+c\lambda \end{cases} \quad ; \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

• $\mathcal{D}$ est parallèle au plan d'équation $x+y+z=2$ ; donc le vecteur $\vec{n}(1,1,1)$, qui est normal à ce plan, sera normal à $\mathcal{D}$.
Donc $\vec{n}.\vec{u}=0$. Donc $a+b+c=0$, donc

$$\boxed{a=-b-c}$$

. D'où l'équation paramétrique de $\mathcal{D}$ :

$$\begin{cases} x=2+(-b-c)\lambda \\ y=1+b\lambda \\ z=3+c\lambda \end{cases} \quad ; \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

• $\mathcal{D}$ rencontre la droite $\mathcal{D}'$ d'équations cartésiennes $x=1$ et $y=z$.
Donc le système suivant, d'inconnue $\lambda$, admet au moins une solution.

$$(S):\begin{cases} 2+(-b-c)\lambda=1 \\ 1+b\lambda=3+c\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} (b+c)\lambda=1 \\ (b-c)\lambda=2 \end{cases}$$

On doit donc avoir

$$\boxed{b+c\neq 0}$$

(sinon la première équation n'a pas de solution), et on obtient :

$$(S) \iff \begin{cases} \lambda=\frac{1}{b+c} \\ \frac{b-c}{b+c}=2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda=\frac{1}{b+c} \\ b-c=2b+2c \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda=\frac{1}{b+c} \\ b=-3c \end{cases}$$

Rassemblons les informations sur les coordonnées du vecteur u$(a,b,c)$ :

$$\begin{cases} a=-b-c \\ b+c\neq 0 \\ b=-3c \end{cases} \iff \begin{cases} a=2c \\ b=-3c \\ c\neq 0 \end{cases}$$

On a un paramètre libre : c'est normal, une infinité de vecteurs conviennent ; on peut par exemple poser $c=1$, et l'on obtient $a=2$ et $b=-3$.
Donc

$$\boxed{\vec{u}(2,-3,1)}$$

.

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ est la droite passant par } A=(2,1,3) \text{ et dirigée par } \vec{u}(2,-3,1)}$$

. Elle a pour équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = 1-3\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R}$$