

Programme de colle : Semaine 18

Lundi 13 février

I Equation Différentielle

1. Equation différentielle linéaire du premier ordre.
2. Equation homogène associée,
3. Méthode de la variation de la constante.
4. Problème de Cauchy.
5. Equation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (homogène et avec second membre simple)

II Géométrie

1. Notion de vecteurs dans le plan et l'espace.
2. Notion de base et repère du plan/de l'espace.
3. Coordonnées d'un vecteur dans une base.
4. Vecteur directeur d'une droite.
5. Vecteur normal d'une droite du plan, d'un plan de l'espace.
6. Projeté orthogonal d'un point sur une droite.
7. Déterminant de deux vecteurs du plan et caractérisation de la colinéarité.
8. Produit scalaire de deux vecteurs du plan et caractérisation de l'orthogonalité
9. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
10. Equation cartésienne d'une droite dans le plan.
11. Equation paramétrique d'une droite dans le plan.
12. Equation cartésienne d'un cercle du plan.

III Informatiques

Les programmes seront écrit en Python.

1. Savoir définir une variable.
2. Savoir manipuler des conditions (`if`, `elif`, `else`)
3. Savoir écrire un script qui calcul une somme, ou les termes d'une suite (boucle `for`)
4. Savoir écrire un script avec une boucle `while`
5. La syntaxe des fonctions a été vue et doit être sue.
6. Boucle sur des listes.
7. Bibliothèque `matplotlib.pyplot` et `numpy`. (vu que par un groupe)
8. Savoir tracer un graphique. (vu que par un groupe)

IV Exercices Types

1. Sans utiliser la fonction `floor` de Python, écrire une fonction Python qui prend en argument un réel x l'entier k tel que $x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi[$
2. Sans utiliser la fonction `floor` de Python, écrire une fonction Python qui prend en argument un réel x et retourne sa partie entière.

3. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n qui simule n lancers de dé à 6 faces et retourne la somme des valeurs des lancers.
4. Tracer la fonction $f(x) = x^3 + 3x + 1$ entre -1 et 1 à l'aide de la bibliothèque `matplotlib.pyplot`.
5. Résoudre les équations différentielles suivantes :
 - (a) $y' - 2y = x + x^2$ sur \mathbb{R}
 - (b) $3y' - 2y = x$ sur \mathbb{R}
 - (c) $(1 + x^2)y' + 2xy = 1$ sur \mathbb{R}
 - (d) $x^2y' - y = e^{-\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$
 - (e) $xy' - (1 + 2x)y = -x^2e^x$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$
 - (f) $y' - 2xy = -(2x - 1)e^x$ sur \mathbb{R}
 - (g) $y'' + 4y' + 4y = x^2e^x$
 - (h) $y'' + 4y' + 4y = x^2e^{-2x}$
 - (i) $y'' + 4y' + 4y = \sin xe^{-2x}$
6. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :
 - (a) $x^2y' - y = e^{-\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ avec $y(1) = 0$
 - (b) $y'' - 4y' + 5y = e^x$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$
 - (c) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$
7. Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Les points distincts A et B ont pour coordonnées respectives $(2, 4)$ et $(-1, 3)$. Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ont pour coordonnées respectives $(2, -1)$ et $(3, -2)$.
 - (a) Donner des équations des droites (AB) , \mathcal{D} droite qui passe par A et de vecteur directeur \vec{u} et \mathcal{D}' droite qui passe par B et qui est orthogonale à \vec{v} .
 - (b) Déterminer l'intersection de D et D' .
 - (c) Donner les coordonnées du projeté orthogonal de $C = (1, 2)$ sur D
 - (d) Donner l'aire du triangle ABC .
8. Soit \mathcal{C} le cercle de centre O et de rayon 1 et soit \mathcal{C}' le cercle de centre Ω de coordonnées $(5, 0)$ et de rayon 2.
 - (a) Quelles sont les équations de ces cercles ?
 - (b) Soit $M_0 \in \mathcal{C}$ le point de coordonnées (x_0, y_0) et soit \mathcal{D}_m la droite d'équation $y_0x - x_0y - m = 0$. Montrer que \mathcal{D}_m est perpendiculaire à la tangente en M_0 à \mathcal{C} .
9. Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soient les points $A(2, 3)$ et $B(1, -1)$. Quelle est l'équation du cercle de centre B passant par A ? Quelle est l'équation de la tangente en A à \mathcal{C} ?