Exercices vacances février

Lundi 20 Février

1. Résoudre $\frac{1}{x+1} \leq \frac{x}{x+2}$.
2. Calculer A^3 où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
3. Calculer l'ensemble de définition et donner la dérivée de

$$f(x) = \exp(\cos(x) - 1)$$

4. Déterminer u_n en fonction de n où $u_0 = 1$ et

$$\forall n \geq 0\, u_{n+1} = 2u_n + 1$$

Correction 1.

1. $\cancel{S =]-\infty, -2[\cup]-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[}$

$$S =]-\infty, -2[\cup[-\sqrt{2}, -1[\cup[\sqrt{2}, +\infty[$$

2. $A^3 = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$
3. $D_f = \mathbb{R}$ $f'(x) = -\sin(x)\exp(\cos(x) - 1)$
4. $u_n = 2^{n+1} - 1$

Mardi 21 Février

1. Résoudre $x^3 + 2x \leq 0$.
2. Calculer N^2 où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En déduire (à l'aide du binome de Newton) la valeur de A^n où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Calculer l'ensemble de définition et donner la dérivée de

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$$

4. Déterminer u_n en fonction de n où $u_0 = 1$ et

$$\forall n \geq 0\, u_{n+1} = \frac{-1}{2}u_n + 1$$

5. Ecrire un script Python qui permet de calculer le terme u_n de la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = \sin(u_n)$$

Correction 2.

1. $S =]-\infty, 0[$
2. $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

3. $D_f = \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$
4. $u_n = \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$
5.
```python
import math as m
def suiteu(n):
    u=1
    for i in range(n):
        u=m.sin(u)
    return(u)
```

Mercredi 22 Février

1. Résoudre $x \leq \sqrt{x+1}$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ Résoudre l'équation
$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
3. Calculer l'ensemble de définition et donner la dérivée de
$$f(x) = \sqrt{\ln(x) + 1}$$
4. Déterminer u_n en fonction de n où $u_0 = 1, u_1 = 2$ et
$$\forall n \geq 0\, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$
5. Ecrire un script Python qui permet de calculer le terme S_n de la suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N},\, S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(k)$$

Correction 3.

1. $S =]-\infty, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
2. $S = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$
3. $D_f = [e^{-1}, +\infty[$ et ⚠ f est dérivable sur $]e^{-1}, +\infty[$ ⚠
   $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)+1}}$
4. $u_n = 2^n$
5.
```python
import math as m
def suiteS(n):
    s=0
    for k in range(n+1):
        s=s+m.sin(k)
    return(s)
```

Jeudi 23 Février

1. Résoudre le systéme de d'inconnue (x, y) et de paramétre $\lambda \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} x+y &= \lambda x \\ x-y &= \lambda y \end{cases}$$
2. Résoudre l'équation
$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
3. Calculer l'ensemble de définition et donner la dérivée de
$$f(x) = \frac{x}{\ln(x) - 1}$$
4. Calculer $\int_1^2 xe^x dx$
5. Ecrire un fonction Python qui prend en argument une liste d'entier et retourne le maximum de cette liste.

Correction 4.

1. Si $\lambda \notin \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$
$$S = \{(0,0)\}$$
Si $\lambda = \sqrt{2}$
$$S = \{(x, (\sqrt{2} - 1)x \,|x \in \mathbb{R}\}$$
Si $\lambda = -\sqrt{2}$
$$S = \{(x, (-\sqrt{2} - 1)x \,|x \in \mathbb{R}\}$$
2. $S = \{(1 - 2y, y) \,|y \in \mathbb{R}\}$
3. $D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[$
$f'(x) = \frac{\ln(x) - 2}{(\ln(x) - 1)^2}$
4. cf TD intégration
5.
```python
def maximum(L):
    M=L[0]
    for el in L:
        if M<el:
            M=el
    return(M)
```

Vendredi 24 Février

1. Résoudre $\frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite du plan passant par $A = (1, 2)$ et $B = (3, 4)$
3. Calculer l'ensemble de définition et donner la dérivée de
$$f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$$
4. Calculer $\int_0^\pi x\cos(x)dx$

5. Ecrire un fonction Python qui prend en argument une liste d'entier et retourne le minimum de cette liste.

Correction 5.

1. $S = [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$
2. $-x + y - 1 = 0$
3. $D_f = \mathbb{R} \setminus 1$
   $f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$
4. cf TD intégration
5.
```
def minimum(L):
    m=L[0]
    for el in L:
        if m>el:
            m=el
    return(m)
```

Samedi 25 Février

1. Montrer que f définie par $f(x) = xe^x$ réalise une bijection entre deux intervalles de $\mathbb{R}$ à déterminer.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite du plan passant par $A = (1, 2)$ et dirigée par $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
3. Calculer l'ensemble de définition et donner la dérivée de
$$f(x) = \frac{x^2}{x - \sqrt{x}}$$
4. Calculer $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$
5. Ecrire un fonction Python qui prend en argument une liste d'entier la moyenne.

Correction 6. : Il y avait une erreur dans la correction du lundi 20 février sur le premier exercice.[1] Résoudre $\frac{1}{x+1} \leq \frac{x}{x+2}$.

$\cancel{S =]-\infty, -2[\cup]-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[}$

$$S =]-\infty, -2[\cup[-\sqrt{2}, -1[\cup[\sqrt{2}, +\infty[$$

1. $f'(x) = (1 + x)e^x$, f strictement croissnate sur $[-1, +\infty[$ $f([-1, +\infty[) = [-e^{-1}, +\infty[$
   f est continue, strictement croissante, f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $[-e^{-1}, +\infty[$.
2. $x + y - 3 = 0$
3. $\cancel{D_f = \mathbb{R}_+^*}$.[2]
$$D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$$
   $f'(x) = \frac{x}{(\sqrt{x}-1)^2}$
4. $I = 2 - \sqrt{2}$

1. Merci Valentine pour la remarque
2. Merci Victor pour la remarque

5

```python
def moyenne(L):
    moy=0
    for el in L:
        moy+=el
    return(moy/len(L))
```

Dimanche 26 Février

DODO !

Lundi 27 Février

1. Résoudre $\cos(2x + \frac{\pi}{2}) = \sin(2x)$.
2. Déterminer l'intersection des droites D et D' définie par :
   — D passe par $A = (1,2)$ et $B = (3,-2)$
   — D' passe par B et est normale à $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. Déterminer la limite de $\ln(\frac{2n+1}{n^2+1}) + \ln(n+3)$
4. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{0} \tan(x)dx$
5. Ecrire un fonction Python qui prend en argument une chaine de caractéres et retourne le nombre de fois où la lettre A apparait.

Correction 7.

1. $S = \{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$
2. $(3,-2)$
3. $\ln(2)$
4. $\frac{-1}{2}\ln(2)$
5.
```
def nombre_de_A(chaine):
    c=0
    for lettre in chaine:
        if lettre=='A':
            c+=1
    return c
```

Mardi 28 Février

1. Résoudre $e^{2x}+e^x-2\leq 0$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan de l'espace passant par $A=(1,2,3)$ $B=(0,1,2)$ et $C=(1,1,1)$
3. Calculer l'ensemble de définition et donner la dérivée de
$$f(x)=x^x$$
4. Calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx$
5. Ecrire un fonction Python qui prend en argument trois entiers a, b et n et qui retourne une liste de n nombres choisis aléatoirement entre a et b de tel sorte que les nombres soit croissant. (Il faut donc que $n\geq b-a$ - question probablement assez difficile pour le faire bien)

Correction 8.

1. $S=]-\infty,\ln(2)]$
2. $-x+2y-z=0$
3. $D_f=R_+^*$, $f'(x)=(\ln(x)+1)x^x$
4. $\frac{1}{2}\ln(\frac{8}{3})$
5.
```
import ramdom as rd
def nombre(a,b,n):
    L=[]
    while len(L)<n:
        p=rd.randint(a,b+1)
        L.append(p)
    return(L)
```

Cette fonction va probablement faire une boucle infinie si n est trop grand...

Mercredi 1 Mars

1. Résoudre $\frac{\ln(x)}{\ln(x)+1} \leq \ln\left(x^2\right)$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan de l'espace passant par $A = (1, 2, 3)$ et dirigé par $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
3. Simplifier $\sum_{k=1}^{n} 2^n$ et $\sum_{k=1}^{n} 2^k$
4. Résoudre $y' + xy = 2x$ avec la condition initiale $y(0) = 1$
5. Ecrire une fonction qui prend deux listes correpondans aux coordonnées de deux points du plan : $A_0 = [x_0, y_0]$ et $A_1 = [x_1, y_1]$ et qui retourne trois réels (a, b, c) tel que $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de la droite (A_0A_1)

Correction 9.

1. $]e^{-1}, e^{-1/2}] \cup [1, +\infty[$
2. $2x - y = 0$ (oui, oui, c'est une equation de plan)
3. $n2^n$ et $2^{n+1} - 2$
4. $S = \{x \mapsto -e^{-x^2} + 2\}$
5.
```
def equation_de_droite(A0,A1):
    x0,y0=A0[0], A0[1]
    x1,y1=A1[0], A1[1]
    return( y0-y1, x1-x0, (y0-y1)x0+(x1-x0)y0)
```

(J'ai fait les calculs sur un papier et j'ai donné les réels ensuite)

Jeudi 2 Mars

1. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$
$$z^2 + z + 1 = 0$$
2. Déterminer le projeté orthogonale du point $A = (1, 2, -1)$ sur le plan d'équation $x+y+z+1 = 0$
3. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$
4. Résoudre $y'' + y = 2x$ avec la condition initiale $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

Correction 10.

1. $S = \{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\}$
2. $(0, 1, -2)$
3. $\ln(n + 1)$
4. $S = \{x \mapsto \cos(x) - 2\sin(x) + 2x\}$

Vendredi 4 Mars

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre l'équation d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et de paramétre $\lambda \in \mathbb{R}$ suivante :
$$(A - \lambda I_3)X = 0_{3,1}$$
2. Montrer que A est inversible et donner son inverse.

Correction 11.

1. Si $\lambda = 1$
$$S = \{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ z \end{pmatrix} \ (x, z) \in \mathbb{R}^2 \}$$
Si $\lambda = 2$
$$S = \{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \ x \in \mathbb{R} \}$$
Si $\lambda \notin \{1, 2\}$
$$S = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$
2. (pivot de gauss) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

Samedi 5 Mars

1. Montrer que les plans d'équation $x + y + z + 1 = 0$ et $x - y + 2z - 3 = 0$ s'intersectent le long d'une droite. Déterminer un vecteur directeur de cette droite.
2. Determiner une équation paramétrique du plan d'équation $x + y + z - 1 = 0$
3. Calculer la limite de $u_n = \frac{(n)!n^2}{n\ln(n)+e^n}$

Correction 12.

1. $\overrightarrow{u} = (-3, 1, 2)$ (où un vecteur proportionnel à celui là)
2. $$\begin{cases} x &= 1 - \lambda - \mu \\ y &= \lambda \\ z &= \mu \end{cases} \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$
3. $+\infty$

Dimanche 6 Mars

DODO !