DM 9 - Géométrie

Exercice 1. On munit le plan d'un repère orthonormé dont l'origine est placée en $A(0,0)$. Soit B, C deux points du plan de coordonnées respectives $B = (x_B, y_B)$ et $C = (x_C, y_C)$.

Soit A' (respectivement B' et C') le milieu de $[BC]$ (respectivement $[AC]$ et $[AB]$)

1. Déterminer les coordonnées de A', B' et C'
2. Soit G le point vérifiant $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA})$.
   (a) Déterminer les coordonnées de G.
   (b) Montrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$
   (c) Montrer que $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'A}$
   (d) Pourquoi a-t-on aussi : $\overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{B'B}$ et $\overrightarrow{GC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{C'C}$?
   (e) Justifier alors que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en G.
3. Soit D la médiatrice de $[AB]$ et D' la médiatrice de $[AC]$ et $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ l'intersection de D et D'.
   (a) Donner les équations cartésiennes des droites D et D'
   (b) Montrer que les coordonnées de Ω vérifie
   $$M \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_B^2 + y_B^2 \\ x_C^2 + y_C^2 \end{pmatrix}$$
   (c) En utilisant le fait que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires justifier que M est inversible et donner son inverse.
   (d) En déduire que
   $$\begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix} = \frac{1}{2\left(x_B y_C - x_C y_B\right)} \begin{pmatrix} y_C\left(x_B^2 + y_B^2\right) - y_B\left(x_C^2 + y_C^2\right) \\ -x_C\left(x_B^2 + y_B^2\right) + x_B\left(x_C^2 + y_C^2\right) \end{pmatrix}$$
   (e) Montrer que $\overrightarrow{A'\Omega} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et justifier alors que Ω appartient à la médiatrice de $[BC]$
4. Soit $H\left(x_H, y_H\right)$ le point d'intersection de la hauteur issue de C et de la hauteur issue B.
   (a) Déterminer des représentations cartésiennes des hauteurs issues de C et B.
   (b) Montrer que les coordonnées de H vérifient l'équation
   $$M \begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B x_C + y_B y_C \\ x_B x_C + y_B y_C \end{pmatrix}.$$
   (c) En déduire les coordonnées de H.
   (d) Montrer que $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et justifier que H appartient à la hauteur issue de A.