# DS 6

## Durée 3h00

- Les calculatrices sont interdites durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amenés à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

**Exercice 1.** Soit $P_1$ le plan de l'espace d'équation $x + y + z + 1 = 0$ et $P_2$ le plan de l'espace d'équation $2x - y - z + 2 = 0$

1. Justifier que ces deux plans s'intersctent le long d'une droite que l'on note $D$
2. Donner un vecteur directeur de $D$.
3. Soit $A$ le point de coordonnées $(2, 1, 0)$. Déterminer les coordonnées de $H$, projeté orthogonal de $A$ sur $P_1$

**Exercice 2.** Déterminer les coordonnées de $M$, intersection de $\mathcal{D} : 2x + 5y - 10 = 0$ et de la droite $\mathcal{D}'$ passant par $A(-1, 2)$ et dirigée par $\vec{u}(3, 2)$.

**Exercice 3.** Soit $P_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $P_n = (X^2 - 1)^n$.

1. Donner le degré et le coefficient dominant de $P_n$.
2. Donner les racines de $P_n$ ainsi que leur multiplicités.

   Soit $Q_n = P_n^{(n)}$ où $(n)$ désigne la dérivée $n$-éme.
3. Calculer $Q_0, Q_1$ et $Q_2$.
4. Que vaut $P_n^{(n-1)}(1)$ et $P_n^{(n-1)}(-1)$ ?
5. Soit $v(x) = P_m^{(m-1)}(x)$. Justifier que $v$ est dérivable et que $v'(x) = Q_m(x)$
6. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$
$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)Q_m(x)dx = -\int_{-1}^{1} P_n^{(n+1)}(x)P_m^{(m-1)}(x)dx$$
7. Montrer à l'aide d'une récurrence sur $k$ que pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ et tout $k \in [\![0, m]\!]$ que
$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)Q_m(x)dx = (-1)^k \int_{-1}^{1} P_n^{(n+k)}(x)P_m^{(m-k)}(x)dx$$
8. On suppose que $n < m$ que vaut $P_n^{(n+m)}$ ?
9. On suppose que $n < m$ déduire des questions précédentes que
$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)Q_m(x)dx = 0$$

**Exercice 4.** Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

1. Expliciter $T_2$ et $T_3$
2. Montrer, à l'aide d'une récurrence double, que $\deg(T_n) = n$ et son coefficient dominant vaut $2^n$.
3. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ que
$$2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta)$$
4. En déduire, à l'aide d'une récurrence double, que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$
5. Résoudre $\cos(n\theta) = 0$ pour $\theta \in [0, \pi]$
6. Déterminer les racines de $T_n$ appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$.
7. Justifier que l'on obtient ainsi toutes les racines de $T_n$.
8. En déduire la factorisation de $T_n$ dans $\mathbb{R}[X]$

**Exercice 5.** On souhaite représenter informatiquement un polynôme. Pour cela, à un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ on associe la liste $[a_0, a_1, \dots, a_n]$. Par exemple le polynôme $P = 1 + X + X^3$ serait représenté par la liste $L = [1, 1, 0, 1]$

1. Soit $Q = 1 + X^2 - 2X^3 + X^5$. Donner la liste représentant $Q$.
2. Expliciter le polynôme représenté par la liste `[0,0,1,0,0]`. Donner une autre liste qui représente aussi ce polynôme.
3. Ecrire une fonction `evaluation` qui prend en argument un flotant $x$ et une liste $L$ qui représente un polynôme $P$ et retourne la valeur de $P(x)$. Par exemple `evaluation([1,1,0,1],2)` doit retourner la valeur 11.
4. Ecrire une fonction `simplification` qui prend en argument une liste `L` et retourne une liste qui ne comporte pas de 0 à droite. Par exemple `simplication([1,1,0,1])` retourne `[1,1,0,1]` et `simplication([1,1,0,1,0,0,0,0])` retourne `[1,1,0,1]`. On rappelle que `L.pop()` enlève le dernier élément d'une liste `L`.
5. Ecrire une fonction `degre` qui prend en argument une liste `L` représentant un polynôme $P$ et retourne le degré de $P$. Par exemple `degre([1,1,0,1])` retourne 3. On fera attention qu'un polynôme puisse être représenté par plusieurs listes comme on l'a vu dans la question 2
6. La fonction suivante ne renvoit rien, elle modifie les listes `L1` et `L2`

```python
def mystere(L1,L2):
  n1,n2 =len(L1), len(L2)
  L1=L1+[0]*len(L2)
  L2=L2+[0]*len(L1)
```

Que vaut la longueur de `L1` et `L2` après avoir appliqué la fonction `mystere(L1,L2)` (on répondra en fonction de `n1=L1` et `n2=L2` les longueurs des listes <u>avant</u> l'exécution de `mystere`)

7. Ecrire une fonction `somme` qui prend en agument deux listes `L1` et `L2` représentant des polynômes $P_1$ et $P_2$ et retourne une liste qui correspond au polynôme $P_1 + P_2$. Par exemple `somme([1,2,3],[0,-2])` retourne `[1,0,3]`
8. Que fait la fonction suivante où $L$ est une liste qui représente un polynôme $P$.

```python
def mystere2(L):
  D=[]
  for k in range(1,len(L)):
     D.append(k*L[k])
  return(D)
```

9. Ecrire une fonction `multipl` qui prend en argument une liste qui correspond à un polynôme $P$ et retourne une liste qui correspond au polynôme $2XP$. Par exemple `multipl([1,1,0,1])` retourne `[0,2,2,0,2]`
10. Ecrire une fonction `Tchebychev` qui prend en argument un entier $n$ et retourne la liste correspondant au polynôme $V_n$ défini par $V_0 = 1$, $V_1 = X$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+2} = 2XV_{n+1} + V_n$$

Par exemple `Tchebychev(1)` retourne `[0,1]`