Correction TP Somme de riemann

[partie informatique à la fin]

Exercice 9

1.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$.
   - On pose alors $f : x \mapsto \dfrac{1+x}{1+x^2}$. Cette fonction est bien continue sur $[0,1]$. Ainsi d'après le théorème de Riemann, on a :

     $$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(x)dx.$$

     Pour calculer l'intégrale, on utilise la méthode lorsque l'on a un polynôme de degré sur un polynôme de degré 2 qui est ici de discriminant strictement négatif et on obtient que : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4}}$.

2.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\dfrac{k}{n}}$.
   - On pose alors $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Cette fonction est bien continue sur $[0,1]$. Ainsi d'après le théorème de Riemann, on a :

     $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{3}.$$

3.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $S_n = \left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}}\right) \times \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^3}}$.
   - On pose alors $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$. Cette fonction est bien continue sur $[0,1]$. Ainsi d'après le théorème de Riemann, on a :

     $$\lim_{n\to+\infty} T_n = \int_0^1 f(x)dx.$$

     Pour calculer l'intégrale, on reconnaît une primitive usuelle et ainsi on obtient que : $\lim_{n\to+\infty} T_n = \dfrac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$.

- Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $S_n = \dfrac{T_n}{\sqrt{n}}$, on a par propriété sur le quotient de limite que : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = 0}$.

4. - Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
   - On pose alors $f : x \mapsto x\sin(\pi x)$. Cette fonction est bien continue sur $[0,1]$. Ainsi d'après le théorème de Riemann, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(x)dx.$$

   Pour calculer l'intégrale, on utilise une IPP et on obtient que : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{\pi}}$.

5. - On commence par transformer l'expression. Il faut donc transformer un produit en somme et ainsi une idée assez classique est de poser pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $t_n = \ln(w_n)$: le passage au logarithme népérien permet de transformer un produit en somme.

   On obtient alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $t_n = \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right) = \dfrac{1}{n}\ln\left(\displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n}\frac{k}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\ln(\frac{k}{n})$. On fait alors un changement de variable pour se ramener à une somme de 1 à n qui va nous permettre ainsi d'appliquer le théorème de Riemann à la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. On pose ainsi $j = k-n$ et on obtient que : $t_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\ln(\frac{j+n}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.
   - On pose alors $f : x \mapsto \ln(1+x)$. Cette fonction est bien continue sur $[0,1]$. Ainsi d'après le théorème de Riemann, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = \int_0^1 f(x)dx = 2\ln 2 - 1.$$

   - Comme on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $t_n = \ln(w_n) \Leftrightarrow w_n = e^{t_n}$, on obtient par propriété sur la composition de limite que : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = e^{2\ln 2-1} = \dfrac{4}{e}}$.

6. - On commence par transformer l'expression. Il faut donc transformer un produit en somme et ainsi une idée assez classique est de poser pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $T_n = \ln(S_n)$: le passage au logarithme népérien permet de transformer un produit en somme.

   On obtient alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $T_n = \dfrac{1}{2n}\ln\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k+n)\right) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\ln(k+n) =$

$\dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\dfrac{k}{n})+\dfrac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n) = \dfrac{\ln n}{2}+\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{2}$. On pose alors pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$: $V_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{2}$ et on a alors pour tout $n\in\mathbb{N}$: $T_n=\dfrac{\ln n}{2}+V_n$. On peut alors appliquer le théorème de Riemann à la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

- On pose alors $f : x\mapsto\dfrac{\ln(1+x)}{2}$. Cette fonction est bien continue sur $[0,1]$. Ainsi d'après le théorème de Riemann, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}V_n=\int_0^1 f(x)dx=\ln 2-\frac{1}{2}$$

en utilisant la primitive de la fonction logarithme népérien.

- Comme on sait que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, on a : $T_n=\dfrac{\ln n}{2}+V_n$, on obtient que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}T_n=+\infty$ par propriété sur les sommes et composée de limites. Puis comme on a aussi que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$: $T_n=\ln(S_n)\Leftrightarrow S_n=e^{T_n}$, on obtient par propriété sur la composée de limite que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty}$.

correction somme de riemann.py

```
#Exercice 2
def R(n,f):
    Sr=0
    for k in range(n):
        Sr=Sr+f(k/n)
    return(Sr/n)

def f_test(x):
    return(x**2+1)

print(R(100,f_test))

def S(n,f):
    Ss=0
    for k in range(1,n+1):
        Ss=Ss+f(k/n)
    return(Ss/n)

print(S(100,f_test))

#Exercice 5
from math import floor, log

def g(x):
    return(1/(1+x))
def approx(epsilon):
    n=floor(1/epsilon)
    return( R(n, g))
print('valeur exacte', log(2))
print('valeur approchée', approx(0.01))


#Exercice 9
def R2(n,a,b,f):
    Sr=0
    for k in range(n):
        Sr=Sr+f(a+k*(b-a)/n)

    return(Sr*(b-a)/n)


def approx2(epsilon):
    n=2*floor(1/epsilon)
    return( R2(n,0,2, g))
print('valeur exacte', log(3))
print('valeur approchée', approx2(0.001))
```