Programme de colle : Semaine 20
Lundi 13 mars

I Polynomes

— Définition des polynômes
— Définition du degré et coefficient dominant.
— Degré d'un produit, d'une composée et d'une somme de polynômes.
— Notation $\mathbb{R}_n[X]$
— Polynomes dérivés et dérivées n-éme.
— Racine d'un polynome et multiplicité. Caractérisation en terme de divisibilité par $(X-\alpha)^m$
— Factorisation d'en $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$
— Th : Un polynome de degré n admet au plus n racines.
— Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ admet $n+1$ racine alors il est nul.
— Si $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ sont égaux sur $n+1$ valeurs alors ils sont égaux en tant que polynomes.
— Les racines n-éme de l'unité sont à la limite du programme... et doivent être guidées. (racine n-éme de l'unité sont les racines complexes du polynôme $X^n - 1$)
— D'Alembert-Gauss a été énoncé mais est Hors Programme.

II Informatiques

Les programmes seront écrit en Python.

1. Savoir définir une variable.
2. Savoir manipuler des conditions (`if, elif, else`)
3. Savoir écrire un script qui calcul une somme, ou les termes d'une suite (boucle `for`)
4. Savoir écrire un script avec une boucle `while`
5. La syntaxe des fonctions a été vue et doit être sue.
6. Boucle sur des listes.
7. Bibliothéque matplolib.pyplot et numpy. (vu que par un groupe)
8. Savoir tracer un graphique. (vu que par un groupe)

III Exercices Types

1. Soient les polynômes $P = X^2 - X + 1$ et $Q = X^3 - X$. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit par récurrence les polynômes P_n par

$$\begin{cases} P_1 = P \\ P_{n+1} = XP_n(Q) + 2QP_n. \end{cases}$$

   (a) Calculer P_2.
   (b) Calculer les degrés de P_2 et de P_3.
   (c) Déterminer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ le degré de P_n.
   (d) Déterminer le coefficient dominant de P_n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère les polynômes $A = (X+1)^n - (X-1)^n$ et $B = \left(\sum_{k=0}^{n} X^k\right)^2$. Calculer le degré de ces deux polynômes.

3. Montrer dans chacun des cas suivants que B divise A :

(a) $A = X^9 - 1$ et $B = X^3 - 1$.

(b) $A = 2X^4 - 3X^3 - X^2 - 15X + 6$ et $B = X^2 - 3X + 1$.

(c) $A = X^3 - iX^2 - X + i + 5$ et $B = X - 1 + i$.

4. Soit $n \geq 2$, on pose $P = (X+1)^n - 1$.

   (a) Déterminer n racines de P dans $\mathbb{C}$ de la forme $u = -1 + e^{\text{iffl}\theta}$.

   (b) Justifier que l'on obtient toutes les racines de P.

   (c) En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}$.

   (d) On note Q le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que : $P = XQ$. À l'aide des racines de Q, déterminer la valeur de :
$$A = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

5. Déterminer tous les polynomes P tel que

   (a) $P(X+1) = P(X)$

   (b) $P(2X) = 2P(X)$

   (c) $P(X^2) = 2XP(X)$

   (d) $P'(2X) = P(X)$