Programme de colle : Semaine 21
Lundi 20 mars

I Introduction aux Probabilités

— Notion d'univers, d'événements. En BCPST1 les univers sont <u>finis</u>
— Evénements certains, incompatibles, contraires. Unions et intersections d'événements.
— Systèmes complets d'événements (S.E.C)
— Probabilité (fonction de $\mathcal{P}(\Omega)$ à valeur dans $[0,1]$ additivite pour l'union d'ensembles disjoints, noté $\mathbb{P}$ ou P)
— En général $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
— Formule des probabilités totales
— Probabilités uniformes sur un ensemble fini.
— Probabilités conditionnelles.
— Formule des probabilités composés.
— Formule des probabilités totales, énoncé avec les proba conditionnelles.
— Formule de Bayes. (Preuve exigible)
— Evénements indépendants.

II Informatiques

Les programmes seront écrit en Python.

1. Obtention maximum/minimum sur une liste.
2. Tri par selection, tri par insertion.

III Exercices Types

1. Donner la formule des probabilités totales (avec ou sans les probabilités conditionnelles)
2. Donner la formule des probabilités composées.
3. Donner et prouver la formule de Bayes.
4. Donner la définition de deux événements indépendants, de deux événements incompatibles.
5. Donner un exemple de deux événements indépendants, de deux événements incompatibles. (L'étudiant posera lui-même l'univers et les événements)
6. Donner un exemple de deux événements qui ne sont pas incompatibles mais qui sont indépendants. (L'étudiant posera lui-même l'univers et les événements)
7. Donner un exemple de deux événements qui ne sont pas indépendants mais qui sont incompatibles. (L'étudiant posera lui-même l'univers et les événements)
8. Si deux événéments sont indépendants, peuvent-il être incompatibles ?
9. Soient trois personnes choisies une à une et sans remise dans une population. On note R_i l'événement « la i-ième personne a un rhésus + ». Ecrire à l'aide des R_i les événements suivants
   - A : « au moins une personne a un rhésus + » ;
   - B : « au moins deux personnes ont un rhésus + » ;
   - C : « une personne exactement a un rhésus + » ;
   - D : « au moins une des deux premières personnes a un rhésus + ».
10. On choisit 5 cartes au hasard et simultanément dans un jeu de 32 cartes. Donner les probabilités d'avoir
    (a) 5 cartes de la même couleur ;
    (b) (2 as et 3 rois) ou (3 as et 2 rois) ;

(c) (au moins un as) et (deux rois exactement).

11. En lançant 6 dés différents, donner les probabilités d'avoir :
    (a) les 6 résultats possibles ;
    (b) au moins deux résultats distincts.
    (c) au moins un 6 et au moins deux 3 ;
12. On considère n urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n$. L'urne U_1 contient b boules blanches et n noires, les autres contiennent initialement b boules blanches et b boules noires. On tire une boule de U_1 que l'on met dans U_2 puis une boule de U_2 que l'on met dans U_3 et ainsi de suite. On note p_i la probabilité d'obtenir une boule blanche au i-ième tirage. Calculer p_1 puis p_{i+1} en fonction de p_i pour $i \geq 2$. Déterminer p_i en fonction de i puis $\lim\limits_{i \to +\infty} p_i$.
13. On possède un jeu de 32 cartes et un jeu de 52 cartes. On choisit au hasard l'un de ces jeux et on y tire une carte. On constate que c'est une dame. Quelle est la probabilité qu'elle vienne du jeu de 32 cartes ?
14. Dans une entreprise, des pièces sont fabriquées en série par deux machines A et B. La machine A, récente, assure 75% de la production. La probabilité qu'une pièce fabriquée par A soit défectueuse est de 0.01. la machine B, plus ancienne, assure le reste de la production et la probabilité qu'elle fabrique une pièce défectueuse est de 0.16.
    (a) On prélève au hasard une pièce fabriquée par cette entreprise. Quelle est la probabilité quelle soit défectueuse ?
    (b) On prélève au hasard, avec remise, 10 pièces fabriquées par cette entreprise. Quelle est la probabilité de trouver au moins deux pièces défectueuses ?
15. Une abeille va chaque jour sur l'une des deux fleurs A et B. Au jour 0, elle va à la fleur A. À chaque nouvelle journée, il y a une probabilité $p \in]0, 1[$ qu'elle aille sur la même fleur que la veille. Pour tout entier n, on note A_n l'événement « l'abeille est sur la fleur A le jour n »et B_n l'événement « l'abeille est sur la fleur B le jour n ». On pose de plus $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$.
    (a) Pour tout entier n, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
    (b) En remarquant que $a_n + b_n = 1$, déterminer les expressions explicites de a_n et b_n.
    (c) Vers quoi tendent les deux suites ? Interpréter.