Programme de colle : Semaine 23
Lundi 3 avril

I Limites

1. Limites et voisinages (on évitera les exercices techniques sur les ϵ)
2. Limite à gauche et limite à droite.
3. Théorème de la limite monotone
4. Théorème des gendarmes.
5. Négligeabilité, notation $o(f(x))$
6. Croissances comparées
7. Equivalent, notation $\sim$
8. Equivalents usuels en 0 ($sin(x)$, $\ln(1+x)$, $e^x - 1$, $(1+x)^\alpha - 1$, $\cos(x) - 1$)

II Continuité

1. Définition de la continuité. Notation $\mathcal{C}^0(I)$
2. Continuité à gauche, à droite.
3. Prolongement par continuité
4. TVI
5. Théorèmes des fonctions continues sur un segment (bornée et atteint ses bornes)
6. Théorème de la bijection

III DL

1. Taux d'accroissement et dérivation.
2. Preuve des équivalents usuels à l'aide des taux d'accroissement
3. Lien entre $o()$ et $\sim$

IV Informatiques

Les programmes seront écrit en Python.

1. Obtention maximum/minimum sur une liste.
2. Tri par selection, tri par insertion.
3. Approximer une intégrale à l'aide des sommes de Riemann.
4. Algorithme de dichotomie.

V Exercices Types

1. Calculer la limite de $\frac{\sin(x^2)}{\cos(x)-1}$ quand x tend vers 0.
2. Montrer que $f(x) = \cos(x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.
3. Montrer que $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0
4. Déterminer un équivalent simple en 0 de $(x + \sin(x))(e^x + \ln(x) - 2)$

5. Donner la limite, ainsi qu'un équivalent au point considéré.

— $f(x) = \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$ en $+\infty$
— $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}$ en $+\infty$ puis en 0
— $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1+x}} - \sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$ en 0 puis en $+\infty$.
— $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$ en 0^+
— $f(x) = \dfrac{1 - e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^x}}{e^{-x}}$ en $+\infty$
— $f(x) = \dfrac{e^{ax} - 1}{x - x^2}$ en 0 puis en $+\infty$ ($a \in \mathbb{R}$)
— $f(x) = \dfrac{x^\alpha \ln x}{x^x - 1}$ en 0^+ ($\alpha > 0$)
— $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{\ln(x^2 - x + 1)}$ en 1

6. Calculer les limites des fonctions suivantes aux bornes de leur domaine de définition. On justifiera correctement les résultats. On fera, lorsque cela est possible, l'interprétation graphique des résultats.

— $f(x) = e^{x^2+x+1}$
— $f(x) = e^{2x} - e^x$
— $f(x) = \dfrac{e^x + x^2 + x + 1}{e^{2x} + 1}$
— $f(x) = \dfrac{x}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$
— $f(x) = e^{x^2} - e^{x+1}$
— $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$
— $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + x^2}{2x + 1}\right)$
— $f(x) = \ln\left(\dfrac{2 - x}{x + 4}\right)$
— $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$
— $f(x) = (2x - 1)e^{\frac{1}{x-2}}$
— $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x}$

7. Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{e^{x^2} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Étudier la continuité de $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{e^x - 1}$.
L'application f_n admet-elle un prolongement par continuité aux bornes de son domaine de définition ?

9. Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(0) = g(1)$ et $f(1) = g(0)$. Démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ possède au moins une solution dans $[0,1]$.