

Programme de colle : Semaine 26

Lundi 15 mai

I Espaces Vectoriels

On ne considère seulement l'espace vectoriel \mathbb{K}^n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) et les sev de \mathbb{K}^n .

1. Savoir vérifier qu'un sous-ensemble est un sev de \mathbb{K}^n .
2. Notion de famille de vecteurs et de sev engendré par une famille de vecteurs $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$
3. Combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs.
4. Passer d'une écriture cartésienne à une écriture paramétrique (et vice versa)
5. Famille libre, génératrice d'un sev, base.
6. Dimension.
7. Rang d'une famille de vecteurs.

II Informatiques

Les programmes seront écrit en Python.

1. Obtention maximum/minimum sur une liste.
2. Tri par selection, tri par insertion.
3. Approximer une intégrale à l'aide des sommes de Riemann.
4. Algorithme de dichotomie.

III Exercices Types

1. L'ensemble F suivant est-il un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x + 2y - t = 0 \quad \text{et} \quad x - 3y + 9z = 1\}.$$

2. Trouver une famille génératrice de l'espace vectoriel suivant

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - y + z = 0 \quad \text{et} \quad y - 2t = 0\}$$

3. Donner l'écriture cartésienne de l'espace vectoriel suivant $E = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 2, 2)$ et $v = (2, 1, 3)$.

4. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Déterminer l'ensemble des valeurs de $m \in \mathbb{R}$ telles que $u = (m, 1, m)$ appartient à $\text{Vect}(v, w)$ avec $v = (1, 1, 1)$ et $w = (1, m, -1)$.

5. Trouver une famille génératrice des deux sous-espaces vectoriels suivants

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - y - 2t = 0 \quad \text{et} \quad x + t = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - z + t = 0 \quad \text{et} \quad y + z = 0\}.$$

6. Les familles suivantes de \mathbb{R}^3 sont-elles libres ou liées ? Si elle est liée, exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des autres.

(a) $u = (1, -1, 0)$, $v = (2, 1, -1)$ et $w = (1, 5, -1)$

(b) $u = (1, 1, 2)$, $v = (2, 1, 0)$ et $w = (3, 1, \lambda)$ λ paramètre réel.

(c) $u = (1, 0, -2)$, $v = (2, 3, 1)$ et $w = (4, -2, 1)$

- (d) $u = (1, 1, -1)$, $v = (1, -1, 1)$, $w = (-1, 1, 1)$ et $t = (1, 1, 1)$
7. (a) $E = \text{Vect}((1, 1, -2), (2, 1, -3), (0, 1, -1))$
(b) $F = \text{Vect}((4, -5, 3), (2, 3, -2), (4, -16, 10), (8, 1, -1))$
8. Soit $m \in \mathbb{R}$. Donner le rang de la famille $((m, 2, 3), (-1, m - 3, -3), (2, 4, m + 5))$.