Table des matières

Chapitre 2 : Fonctions usuelles

I Fonctions polynomiales

I. 1 Constante

Définition 1. Soit a un réel et soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = a$$

On dit alors que f est la fonction constante égale à a.

I. 2 Affine

Définition 2. Soit a, b deux réels et $a \neq 0$. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax + b$$

On dit alors que f est une fonction affine. On appelle a le coefficient directeur (ou pente) de f et b son ordonnée à l'origine.

Proposition 3. Soit $f(x) = ax + b$ une fonction affine. On a alors

— Si $a > 0$, $f(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq \frac{-b}{a}$

— Si $a < 0$, $f(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq \frac{-b}{a}$

I. 3 Fonctions du second degré

Définition 4. Soit a, b, c trois réels et $a \neq 0$. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

On dit alors que f est une fonction polynomiale de degré 2.

Définition 5. On appelle discriminant d'une fonction polynomiale de degré 2, $f(x) == ax^2 + bx + c$, le nombre souvent noté Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Définition 6. On appelle racine de f un nombre r tel que $f(r) = 0$

Proposition 7. Soit f une fonction polynomiale de degré 2, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Soit Δ son discriminant. On a alors :

— Si $\Delta > 0$, f admet deux racines réelles

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

— Si $\Delta = 0$, f admet une unique racine réelle

$$r = \frac{-b}{2a}$$

— Si $\Delta < 0$, f n'admet aucune racine réelle (mais des racines complexes...)

Exercice 8. Ecrire un script Python qui permet de résoudre les équations polynomiales de degré 2.

I. 4 Fonctions polynomiales de degré n

Définition 9. Soit $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, $n+1$ réels avec $a_n \neq 0$. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

On dit alors que f est une fonction polynomiale de degré n.

Définition 10. (Généralisation) On appelle racine de f un nombre r tel que $f(r) = 0$

II Fonctions $\ln$ et $\exp$

Théorème 11. Il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$\forall x > 0 \, f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f(1) = 0$$

Définition 12. On appelle logarithme népérien et on note ln la fonction f du théorème précédent.

Théorème 13. Il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x > 0 \, f'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

Définition 14. On appelle exponentielle et on note exp la fonction f du théorème précédent.

Proposition 15. On a pour tout $x > 0$:

$$\exp(\ln(x)) = x$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln(\exp(x)) = x$$

Propriétés du $\ln$, $\exp$, puissances :

Propriétés du logarithme ($a > 0,\ b > 0$) :	Propriétés de l'exponentielle :
• $\ln(ab) =$	• $e^a e^b =$
• $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) =$	• $\dfrac{e^a}{e^b} =$
• $\ln(a^p) =$	• $(e^a)^b =$
• La fonction logarithme est	• La fonction exponentielle est ....

Les inégalités suivantes sont ultra-classiques et doivent savoir être prouvées :

Proposition 16. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x \geq x + 1$$

Pour tout $x > -1$:

$$\ln(x+1) \leq x$$

III Valeur absolue

Définition 17. La fonction *valeur absolue* est notée $|\cdot| : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarque :

- En particulier, la fonction valeur absolue est toujours positive. De plus, $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alors, $|x - y|$ correspond à la distance entre x et y sur la droite réelle.
- C'est une trivialité que $x \leq |x|$ et $-x \leq |x|$.
- La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable en 0.

Proposition 18. Soit, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors :

1. $|x| = |-x|$
2. $|xy| = |x||y|$
3. Si $y \neq 0$ alors, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Proposition 19. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{(x^2)} = |x|$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$(\sqrt{x})^2 = x = |x|$$

Proposition 20. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|x|^2 = |x^2| = x^2$$

Démonstration. 1. Evident.
2. Disjonction de cas.
3. Poser $y' = \frac{1}{y}$ et appliquer 1.

□

Proposition 21. Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel et $\epsilon > 0$ un réel strictement positif. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|x - a| \leq \epsilon \Longleftrightarrow a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon \Longleftrightarrow x \in [a - \epsilon, a + \epsilon].$$

En particulier, pour tout $\epsilon > 0$, l'inégalité $|x| \leq \epsilon$ est équivalente à $-\epsilon \leq x \leq \epsilon$ ou a $x \in [-\epsilon, \epsilon]$.

Proposition 22 (Inégalité triangulaire ♥)**.** Soit, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors :

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Démonstration. Solution 1 : Disjonction de cas.
Solution 2 : On passe l'inégalité au carré. □

Corollaire Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors :

$$\Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y|$$

Démonstration. On pose $x' = x$ et $y' = y - x$. On a alors d'après l'inégalité triangulaire :

$$|y| = |x' + y'| \leq |x'| + |y'| = |x| + |y - x|.$$

D'où, $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$. L'inégalité $-|y| + |x| \leq |x - y|$, se montre de la même façon en posant $x' = x - y$ et $y' = y$.

□

Enlever les valeurs absolues :

- Pour enlever une valeur absolue, il faut connaître le signe de ce qui est à l'intérieur.
  $\Longrightarrow$ Étude de cas selon le signe de ce qui est à l'intérieur de la valeur absolue.

Exercice 1. Résoudre $|x - 1| = 2x + 3$.

Exercice 2. Résoudre $x^2 = |x|$.

Exercice 3. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

Trouver et montrer une formule similaire pour $\max(x, y)$.

Exercice 4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|-x - 1| + 4 = |2x + 1| - 5x + 1$
2. $|3 - x| > |x + 2|$
3. $|x - 1| + |x + 2| < 3$
4. $|x^2 - 2x - 5| > x - 7$

IV Partie entière

Définition 23. La fonction *partie entière* est notée $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{Z}$ et définie par :

$$\lfloor x \rfloor = \sup\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq x\}.$$

Remarques :

- La fonction partie entière est parfois notée $E(\cdot)$. On évitera cette notation afin de ne pas la confondre avec l'espèrance d'une variable aléatoire, cf Chapitre Probabilité.
- La fonction partie entière et continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Elle n'est pas continue aux poins entiers.

Exemples :

- $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor -2 \rfloor = -2$
- $\lfloor 2.2 \rfloor = 2$, $\lfloor -2.2 \rfloor = -3$
- $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$

Proposition 24. La partie entière de $x \in \mathbb{R}$ est l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant :

$$n \leq x < n + 1.$$

Remarque :

- J'ai choisi de définir la fonction partie entière avec la Définition 23 et de prouver la Proposition 24. On aurait pu faire l'inverse : définir la partie entière de x comme l'unique entier n vérifiant l'équation $n \leq x < n + 1$ puis prouver qu'elle vérifie $\lfloor x \rfloor = \sup\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq x\}$.

Exercice 5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Exercice 6. Calculer la limite de $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

V Fonction trigonométrique

Définition 25. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan. Soit $\mathcal{C}$ le cercle unité, à savoir le cercle de centre O et de rayon 1. On dit que $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique.

Soit θ un réel et M le point de $\mathcal{C}$ tel que θ corresponde à la longueur orientée le long du cercle entre O et M. On dit alors que θ est une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

Définition 26. On définit le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle θ par :

- $\cos(\theta)$ est l'abscisse de M
- $\sin(\theta)$ est l'ordonnée de M
- $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

Théorème 27. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

$$\frac{1}{\cos^2(\theta)} = 1 + \tan^2(\theta)$$

Remarques :

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccccc} -1 & \leq & \cos(\theta) & \leq & 1 \\ -1 & \leq & \sin(\theta) & \leq & 1 \end{array}$$

- La fonction tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$.

Proposition 28.
1. cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$
2. sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin'(x) = \cos(x)$
3. tan est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ et $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$

Valeurs particulières

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$						
$\sin(x)$						
$\tan(x)$						

Exercice 7. Donner la valeur des nombres suivants :

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos(x)$						
$\sin(x)$						
$\tan(x)$						