

Table des matières

I	Formalisme des récurrences	1
II	Notations \sum et \prod	2
II. 1	Définitions	2
II. 2	Propriétés	3
II. 2. a	La linéarité de la somme	3
II. 2. b	La relation de Chasles	3
II. 2. c	Le changement d'indice	4
III	Sommes usuelles	4
III. 1	$\sum_{k=0}^n k^p$	4
III. 2	Somme géométrique	4
III. 3	Binôme de Newton	5
III. 3. a	Coefficients binomiaux : définition et propriétés	5
III. 3. b	Binôme de Newton	6
IV	Approfondissement	6
IV. 1	Réurrence double	6
IV. 2	Réurrence forte	6
IV. 3	Somme double	7
IV. 3. a	Définition et notations	7
IV. 3. b	Méthode directe	7
IV. 3. c	Inversion des symboles sommes	7

Chapitre 3 : Entiers, sommes et produits


I Formalisme des récurrences

Théorème 1 (Axiome de récurrence). Si $P(n)$ est une proposition telle que :

- $P(0)$ est vraie, (ou plus généralement $P(n_0)$ est vraie pour un certain entier $n_0 \in \mathbb{N}$)
- $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n + 1)$,

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. (ou plus généralement $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$)

Conseil rédactionnel ♥ :

- **On définit clairement la propriété à démontrer :**
Montrons par récurrence sur l'entier $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$:
- **Initialisation :** pour $n = n_0$:
On vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité :**
Soit $n \geq n_0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n . Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
 N'oubliez pas de signaler l'endroit où vous utilisez l'hypothèse de récurrence.
- **Conclusion :**
Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$.

Exercice 1. ♥ Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Démonstration. Montrons par récurrence sur l'entier $n \geq 0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Initialisation : Pour $n = 0$ on a d'une part : $\sum_{k=0}^0 k^2 = 0^2 = 0$. D'autre part on a : $\frac{0(0+1)(2*0+1)}{6} = 0$.
La propriété P est donc vraie au rang 0.

Hérédité :

Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n . Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Considérons le membre de gauche de l'égalité de $\mathcal{P}(n+1)$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^n k^2 + (n+1)^2$$

Par hypothèse de récurrence on a $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, donc

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

Mettons $(n+1)$ en facteur. On obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)[2n^2 + 7n + 6]}{6}. \end{aligned}$$

Or $(2n^2 + 7n + 6) = (2n+3)(n+2) = (2(n+1)+1)((n+1)+1)$, donc :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

La propriété P est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion :

Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

□

II Notations \sum et \prod

II. 1 Définitions

Définition 2. Soit n un entier naturel et a_1, a_2, \dots, a_n des nombres réels ou complexes.

Leur somme est notée $\sum_{k=1}^n a_k$. Cela correspond à $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

 La somme $\sum_{k=1}^n a_k$ NE DEPEND PAS DE k . 

On a ainsi $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{j=1}^n a_j$.

Remarque. Si le symbole \sum vous semble complexe dans l'expression $\sum_{k=1}^n a_k$, ne pas hésiter à écrire la somme en extension $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ pour mieux la comprendre.

Exercice 3. 1. Calculer les quatre sommes suivantes : $\sum_{k=1}^8 1$, $\sum_{j=0}^4 \frac{1}{2}$, $\sum_{i=1}^n 1$, $\sum_{k=0}^n (-4)$.

2. Comparer $\sum_{k=2}^5 a_k$ et $\sum_{k=0}^3 a_{5-k}$.

3. Écrire en extension $\sum_{k=0}^5 a_{3k+1}$.

Exercice 4. Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole \sum :

- $5a_1 + 5a_2 + 5a_3 + 5a_4$.
- $a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2n}$.
- $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$.
- $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n}$.

Définition 5. Soit n un entier naturel et a_1, a_2, \dots, a_n des nombres réels ou complexes.

Leur produit est noté

Cela correspond à $\prod_{k=1}^n a_k = \dots$

Exemples. Calculer les produits suivants : $P_1 = \prod_{k=1}^n x$ et $P_2 = \prod_{j=1}^n (2j)$.

Exercice 6. Calculer $P_1 = \prod_{k=0}^n 2^k$ et $P_2 = \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1}$.

II. 2 Propriétés

II. 2. a La linéarité de la somme

Proposition 7. Soient n un entier naturel. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ des réels ou complexes, et soit λ un nombre réel ou complexe.

$$\sum_{k=1}^n (\lambda a_k + b_k) =$$

⚠ C'est faux avec la multiplication et la division : $\sum_{k=0}^n a_k b_k \neq \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) \left(\sum_{k=0}^n b_k \right)$ et $\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{b_k} \neq \frac{\sum_{k=0}^n a_k}{\sum_{k=0}^n b_k}$ ($b_k \neq 0$).

II. 2. b La relation de Chasles

Proposition 8. Soient n un entier naturel et $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Soient a_1, a_2, \dots, a_n des nombres réels ou complexes.

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k$$

Exemples. • $\sum_{j=0}^n a_j = a_0 + \sum_{j=1}^n a_j$

• $\sum_{j=0}^{n+1} a_j = \sum_{j=0}^n a_j + a_{n+1}$

Exercice 9. • Écrire avec une seule somme : $\sum_{j=1}^n b_j + \sum_{j=n+1}^{2n} b_j =$

• Simplifier les sommes suivantes : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$ et $\sum_{i=0}^{n+2} a_i + \sum_{j=1}^{n+1} a_j - 2 \sum_{k=2}^{n+1} a_k$.

II. 2. c Le changement d'indice

Exemples. • Transformation de $\sum_{i=0}^n a_{i+1}$:

• Transformation de $\sum_{i=1}^n a_{i-1}$:

On pose $j = i + 1, i + 2, i - 1, i - 2, \dots$

On doit alors :

- Regarder le nouvel ensemble de sommation
- Transformer i en $j - 1, j - 2, j + 1, j + 2$

- Changer les indices dans toute la somme.

Exercice 10. On pose : $S = \sum_{k=1}^n k$ et $T = \sum_{k=1}^n (n - k + 1)$. Montrer que $S = T$, puis calculer $S + T$. En déduire la valeur de S .

III Sommes usuelles

III. 1 $\sum_{k=0}^n k^p$

Proposition 11.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n 1 &= n + 1 \\ \sum_{k=0}^n k^1 &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{k=0}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \sum_{k=0}^n k^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Plus généralement on a

$$\sum_{k=m}^n k^1 = \frac{(n+m)(n-m+1)}{2}$$

Exemple Calculer les sommes suivantes : $\sum_{k=10}^{100} k$, $\sum_{k=10}^{100} k^2$, $\sum_{k=1}^{2^n} k^3$

III. 2 Somme géométrique

Proposition 12. Soit $q \neq 1$ on a alors :

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

III. 3 Binôme de Newton

III. 3. a Coefficients binomiaux : définition et propriétés

Définition 13. Soit (n, p) deux entiers naturels.

- Si $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on appelle coefficient binomial, le nombre

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

- Par convention si $p \notin \llbracket 0, n \rrbracket$: $\binom{n}{p} = 0$

Exemples. • $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n)!} = 1$, $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$

• $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1$, $\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = n$,

$$\binom{n}{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!(n-(n-2))!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Remarque. Les coefficients binomiaux seront très utiles en dénombrement : $\binom{n}{p}$ est le nombre de tirages simultanés (sans ordre et sans répétition) de p boules parmi n .

Proposition 14. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$.

- Symétrie des coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- Triangle de Pascal :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Exercice 15. Faire la preuve de la proposition (pas besoin de récurrence)

Correction

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

et

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} \\ &= \frac{(n-k+1)n! + kn!}{(n-k+1)!k!} \quad \text{on met au même dénominateur} \\ &= \frac{(n+1)n!}{(n-k+1)!k!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} \\ &= \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

Proposition 16. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

En conséquence

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

Exercice 17. Soit $(n, p, k, j) \in \mathbb{N}^4$ avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$. Montrer que $\binom{n}{k} \binom{k}{j} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-k}$.

III. 3. b Binôme de Newton

Théorème 18 (Binôme de Newton).

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

IV Approfondissement

IV. 1 Récurrence double

IV. 2 Récurrence forte

Ce type de raisonnement s'utilise quand on a une propriété $P(n)$ qui dépend de tous les $k \leq n$.

Exercice 19. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^n$

Exercice 20. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_1 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n u_k$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3$

IV. 3 Somme double

IV. 3. a Définition et notations

On souhaite calculer des sommes dont les termes dépendent de deux indices, par exemple : $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^p a_{i,j}$.

Exemples. Calculer les sommes doubles suivantes : $S_1 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (i+j)$ et $S_2 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i ij$.

Remarque. On pourra noter ces sommes doubles à l'aide d'un seul symbole \sum , en indiquant en dessous comment varient les deux indices. Par exemple, on a : $S_1 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (i+j) = \dots$

et $S_2 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^i ij = \dots$

De plus, il est toujours conseillé de représenter le domaine des indices pour lequel on effectue la somme.

IV. 3. b Méthode directe

Calcul de $\sum_i \sum_j a_{ij} = \sum_i \left[\sum_j a_{ij} \right] :$

- On calcule d'abord la somme la plus intérieure (ici celle d'indice j) qui dépend ou non de i
- On calcule la deuxième somme.

Exercice 21. Calculer les sommes suivantes $S_1 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i x^j$, $S_2 = \sum_{k=0}^{n^2} \sum_{i=k}^{k+2} ki^2$ et $S_3 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^j \frac{x^i}{x^j}$.

IV. 3. c Inversion des symboles sommes

Lorsque l'on n'arrive pas à calculer la somme la plus intérieure directement, on commence par inverser le sens des symboles somme. Il faut alors distinguer le cas d'indices liés ou non liés.

1. Indices non liés : les indices ne dépendent pas les uns des autres. On inverse sans précaution :

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n'} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n'} \sum_{i=0}^n a_{i,j}$$

2. Indices liés : les bornes d'un indice dépendent des autres. On fait très attention :

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i a_{ij} =$$

Car : $\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq i \end{array} \right\} \iff$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} =$$

Car : $\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq i \leq n \\ i \leq j \leq n \end{array} \right\} \iff$

Remarque. Dessiner le domaine des indices pour lequel on effectue la somme, ou représenter les positions relatives des indices sur un axe réel si l'échange d'indices liés vous paraît difficile.

Exemples. Calculer les sommes doubles suivantes : $S_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j}$ et $S_2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j x^j$.

Exercice 22. Vérifier que $\sum_{k=1}^n k2^k = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k 2^k$. Donner alors une expression simple de cette somme en intervertissant l'ordre de sommation.