

TD 1 - Nombres réels

I Ensembles

Exercice 1. Décrire sous forme d'intervalles (ou d'union d'intervalles) les ensembles suivants :

1. $E_1 = \{x \mid x^2 + 1 < 2\}$
2. $E_2 = \{x^2 + 1 \mid x < 2\}$
3. $E_3 = \{x^2 - 2x \mid x \in [-1, 2]\}$
4. $E_4 = \{x + y \mid x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$
5. $E_5 = \{x - y \mid x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$
6. $E_6 = \{x^2 - y^2 \mid x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]\}$

Exercice 2. Dire si les ensembles suivants sont majorés, minorés, bornés? (On ne demande pas de justification précise)

1. $E_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 + 1 > 2\}$
2. $E_2 = \{x^2 \mid x < 2\}$
3. $E_3 = \{\exp(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
4. $E_4 = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
5. $E_5 = \{x + y \mid x \in]1, +\infty[, y \in [1, +\infty[)\}$
6. $E_6 = \{x - y \mid x \in]1, +\infty[, y \in [1, +\infty[)\}$

Exercice 3. On considère les sous-ensembles suivants de \mathbb{R}^2 :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y = 2\} \quad \text{et} \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (3x + y + 2)(x + 2y + 4) \geq 0\}.$$

Représenter graphiquement A et B et montrer que $A \subset B$. A-t-on égalité?

II Calculs

Exercice 4. Simplifier au maximum :

1. $\frac{4^{10}}{8^4}$
2. $10^3 10^{-4} 100^3$
3. $\frac{(10^4)^2}{10^5}$
4. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$
5. $\frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{24}$
6. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

Exercice 5. Mettre sous la forme d'une seule fraction l'expression suivante :

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} + \frac{1}{-1 - \frac{1}{1 - x}}$$

III Résolution d'équations et d'inéquations :

Exercice 6. Résoudre les (in)-équations suivantes :

1. $x^3 + 4x^2 + x - 6 \geq 0$
2. $x^3 - x^2 - x - 2 < 0$
3. $(3x - 1)(x + 2) + (2 - 6x)(4x + 3) > 0$
4. $32x^6 - 162x^2 < 0$
5. $\frac{2x}{4x^2 - 1} \leq \frac{2x + 1}{4x^2 - 4x + 1}$
6. $\frac{x^4 + x}{x^4 - 5x^2 + 4} < 1$
7. $2x^2 - 4x + 2 = 1 - x$
8. $(x - 1)^2 \leq 1$
9. $\frac{1}{x - 2} \leq \frac{1}{2x}$
10. $\frac{2x + 1}{1 + x} \geq \frac{3x - 2}{1 + x}$
11. $\frac{x^2 + 10x - 4}{x - 2} \leq \frac{16x + 2}{x + 1}$

Exercice 7. Résoudre l'équation pour $x \in \mathbb{R}$ de paramètre a :

$$\frac{1}{x-a} \geq x$$

Exercice 8. Résoudre dans \mathbb{R} et selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $m(x+2) = 2m(3x-4)$

2. $(m+1)x + 2 - m = 0$

3. $e^{2x} - 2me^x + 1 = 0$

4. $\frac{m+3}{x} = \frac{2m-1}{x-1}$

5. $x - m = \sqrt{x^2 + mx}$.

Exercice 9. Trouver toutes les valeurs du paramètre m telles que l'équation suivante ait deux racines réelles distinctes : $mx^2 + (m-2)x + 2m - 2 = 0$.

Exercice 10. Résolution d'équations et d'inéquations avec des radicaux :

1. $\sqrt{x+1} = x-1$

2. $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+2} \leq 1$

3. $\sqrt{x^2-3} > 5x-9$

4. $\sqrt{(x+3)(x-1)} \geq 2x-1$

5. $\sqrt{x+4} - \sqrt{x+2} = 1$

6. $x+1 > \sqrt{x^2+2x}$

7. $1 \leq \left(\frac{x-3}{x-1}\right)^2 \leq 9$

Exercice 11. Résolution d'équations et d'inéquations avec changement de variables :

1. $e^x - 1 \geq \sqrt{e^{x+1} - e^x - e + 1}$

2. $\frac{\ln(x^2)+1}{\ln(x)+1} < 0$

3. $\sqrt{9^x-1} > 3^x-2$

4. $x\sqrt{x} - 4x - \sqrt{x} + 4 > 0$