Correction TD 2 - Fonctions usuelles

I Valeur absolue

Correction 1. Résolution d'équations et d'inéquations avec des valeurs absolues.

1. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $|\mathbf{2+x}|+\mathbf{2}+\mathbf{2x}=\mathbf{x^2}$:**
   Il y a une valeur absolue, on doit donc étudier deux cas :
   - Cas 1 : si $2+x \geq 0$, à savoir si $x \geq -2$. L'équation à résoudre est alors
   $$2+x+2+2x=x^2 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0$$
   Le discriminant d'une telle équation est $\Delta=25$, ainsi, les solutions sont $x_1=-1$ et $x_2=4$. Elles sont bien toutes les deux supérieures à -2, donc $\mathcal{S}_1=\{-1,4\}$.
   - Cas 2, si $2+x \leq 0$, à savoir si $x \leq -2$. L'équation à résoudre est alors
   $$-2-x+2+2x=x^2 \Leftrightarrow x^2-x=0$$
   Les solutions sont $x_1=0$ et $x_2=-1$. Aucune des deux solutions trouvées n'appartient à l'intervalle $]-\infty,-2]$, ainsi $\mathcal{S}_2=\{\emptyset\}$.

   Synthèse : on obtient $\boxed{\mathcal{S}=\{-1,4\}}$.
2. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{x^2}=|\mathbf{x}|$:**
   Il y a une valeur absolue, on étudie donc deux cas :
   - Cas 1 : si $x \geq 0$. L'équation à résoudre est alors équivalente à
   $$x^2=x \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0.$$
   L'ensemble des solutions est alors $\mathcal{S}_1=\{0,1\}$.
   - Cas 2 : si $x \leq 0$. L'équation à résoudre est alors équivalente à
   $$x^2=-x \Leftrightarrow x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0.$$
   L'ensemble des solutions est alors $\mathcal{S}_2=\{-1,0\}$.

   Synthèse : l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}=\{-1,0,1\}}$.
3. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $|\mathbf{2x-3}| \leq \mathbf{2}$:**
   On fait deux cas selon que $2x-3 \geq 0$ ou $2x-3<0$ et on obtient $\boxed{\mathcal{S}=\left[\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right]}$.
4. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $|\mathbf{2x+3}|-|-\mathbf{5x+6}| \geq \mathbf{3x+2}$:**
   On commence par faire un tableau récapitulatif et on obtient :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{6}{5}$		$+\infty$
$\|2x+3\|$		$-2x-3$	0	$2x+3$		$2x+3$	
$\|-5x+6\|$		$-5x+6$		$-5x+6$	0	$5x-6$	
$\|2x+3\|-\|-5x+6\|$		$3x-9$		$7x-3$		$-3x+9$	

On étudie alors les 3 cas et on obtient au final : $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset.}$

5. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $|\mathbf{x^2 - 1}| \leq \mathbf{2}|\mathbf{x}|$:**
On commence par faire un tableau récapitulatif des cas :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\lvert x\rvert$		$-x$		$-x$	0	x		x	
$\lvert x^2-1\rvert$		x^2-1	0	$-x^2+1$		$-x^2+1$	0	x^2-1	

Étude de cas :

- Cas 1 : si $x \in]-\infty, -1]$:
$$|x^2 - 1| \leq 2|x| \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq -2x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 \leq 0.$$
Ainsi $\mathcal{S}_1 = [-1 - \sqrt{2}, -1]$.
- Cas 2 : si $x \in]-1, 0[$:
$$|x^2 - 1| \leq 2|x| \Leftrightarrow -x^2 + 1 \leq -2x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \geq 0.$$
Ainsi $\mathcal{S}_2 =]-1, 1 - \sqrt{2}]$.
- Cas 3 : si $x \in [0, 1]$:
$$|x^2 - 1| \leq 2|x| \Leftrightarrow -x^2 + 1 \leq 2x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 \geq 0.$$
Ainsi $\mathcal{S}_3 = [-1 + \sqrt{2}, 1]$.
- Cas 4 : si $x \in]1, +\infty[$:
$$|x^2 - 1| \leq 2|x| \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \leq 0.$$
Ainsi $\mathcal{S}_4 =]1, 1 + \sqrt{2}]$.

Synthèse : on obtient $\boxed{\mathcal{S} = [-1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}] \cup [-1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]}$.

6. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $||\mathbf{x}| - \mathbf{5}| \geq ||\mathbf{3x}| - \mathbf{3}|$:**
On commence toujours par se débarasser des valeurs absolues à l'intérieur :

- Si $x \geq 0$: On a alors : (6) $\Leftrightarrow |x - 5| \geq |3x - 3|$. Ici soit on refait des cas sur les signes de $x - 5$ et $3x - 3$, soit on élève au carré car les valeurs absolues sont positives. On applique la deuxième méthode :
$$(6) \Leftrightarrow (x - 5)^2 \geq (3x - 3)^2 \Leftrightarrow -8x^2 + 8x + 16 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 \geq 0$$
On trouve alors $x \in [-1, 2]$. Attention, il faut aussi dans ce premier cas que x soit positif : au final, $S_1 = [0, 2]$.
- Si $x < 0$: On a alors : (6) $\Leftrightarrow |-x - 5| \geq |-3x - 3|$. On élève au carré car les valeurs absolues sont positives :
$$(6) \Leftrightarrow (-x - 5)^2 \geq (-3x - 3)^2 \Leftrightarrow -8x^2 - 8x + 16 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 - x + 2 \geq 0$$
On trouve $x \in [-2, 1]$, mais comme on doit avoir $x < 0$ dans ce deuxième cas, on a $S_2 = [-2, 0[$.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = S_1 \cup S_2 = [-2, 2]}$.

7. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\sqrt{\mathbf{x^2-x-2}} \geq |\mathbf{3x+2}|$:**

- Domaine de définition : L'inéqution est bien définie si $x^2-x-2 \geq 0$. Ainsi $\mathcal{D} =]-\infty,-1] \cup [2,+\infty[$.
- Tableau récapitulatif :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$\|3x+2\|$		$-3x-2$	0	$3x+2$	

- Étude de cas :
  - ⋆ Cas 1 : si $x \in \left]-\infty,-\frac{2}{3}\right]$: on se place donc sur $]-\infty,-1]$:
    On doit alors résoudre $\sqrt{x^2-x-2} \geq -3x-2$. Les deux termes sont bien positifs donc on peut passer au carré tout en conservant l'équivalence. On obtient :
    $$\sqrt{x^2-x-2} \geq |3x+2| \Leftrightarrow x^2-x-2 \geq 9x^2+12x+4 \Leftrightarrow 8x^2+13x+6 \leq 0.$$
    Le discriminant vaut $\Delta = -23 < 0$. Ainsi $\mathcal{S}_1 = \emptyset$.
  - ⋆ Cas 2 : si $x \in \left]-\frac{2}{3},+\infty\right[$: on se place donc sur $[2,+\infty[$:
    On doit alors résoudre $\sqrt{x^2-x-2} \geq 3x+2$. Les deux termes sont bien positifs donc on peut passer au carré tout en conservant l'équivalence. On obtient :
    $$\sqrt{x^2-x-2} \geq |3x+2| \Leftrightarrow x^2-x-2 \geq 9x^2+12x+4 \Leftrightarrow 8x^2+13x+6 \leq 0.$$
    Le discriminant vaut $\Delta = -23 < 0$. Ainsi $\mathcal{S}_2 = \emptyset$.

  Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$.

8. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\dfrac{\mathbf{x^2+\sqrt{2}x}}{|\mathbf{x^2-1}|+\mathbf{1}} \geq \mathbf{1}$:**

- Domaine de définition : L'inéquation est bien définie si $|x^2-1|+1 \neq 0$. Ce qui est toujours le cas comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Ainsi $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tableau récapitulatif :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\|x^2-1\|$		x^2-1	0	$-x^2+1$	0	x^2-1	

- Étude de cas :
  - ⋆ Cas 1 : si $x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$:
    $$\frac{x^2+\sqrt{2}x}{|x^2-1|+1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+\sqrt{2}x}{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{2}}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$
    Ainsi $\mathcal{S}_1 = [1,+\infty[$.
  - ⋆ Cas 2 : si $x \in]-1,1[$:
    $$\frac{x^2+\sqrt{2}x}{|x^2-1|+1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+\sqrt{2}x}{-x^2+2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2+x\sqrt{2}-2}{2-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$
    Un tableau de signe avec le signe du numérateur (les racines du numérateur étant $-\sqrt{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$) et celui du dénominateur donne : $\mathcal{S}_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[$.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}=\left[\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right[.}$

II Partie entière

Correction 2. Video

Correction 3.

1. Seule la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ mais sur $\mathbb{R}_+$ ainsi (E) est bien définie pour tout x tel que $5x-1\geq 0$ c'est-à-dire

$$\boxed{D_E=]\tfrac{1}{5},+\infty[}$$

2. Cours

$$\boxed{\forall a\in\mathbb{R}\quad a-1<\lfloor a\rfloor\leq a}$$

3. Notons $f(x)=\left\lfloor 2x-\sqrt{5x-1}\right\rfloor$ On a $f(\frac{1}{5})=\left\lfloor 2\frac{1}{5}-\sqrt{5\frac{1}{5}-1}\right\rfloor=\left\lfloor 2\frac{1}{5}\right\rfloor=0$ Donc

$$\boxed{\tfrac{1}{5}\text{ est solution de }E}$$

On a $f(\frac{1}{2})=\left\lfloor 2\frac{1}{2}-\sqrt{5\frac{1}{2}-1}\right\rfloor=\left\lfloor 1-\sqrt{\frac{3}{2}}\right\rfloor$ Or $\frac{3}{2}>1$ donc $\sqrt{\frac{3}{2}}>\sqrt{1}=1$ et donc $1-\sqrt{\frac{3}{2}}<0$ ainsi

$$\boxed{\tfrac{1}{2}\text{ n'est pas solution de }E}$$

On a $f(1)=\left\lfloor 2\times 1-\sqrt{5-1}\right\rfloor=\lfloor 2-2\rfloor=\lfloor 0\rfloor$

$$\boxed{1\text{ est solution de }E}$$

On a $f(12)=\left\lfloor 2\times 12-\sqrt{60-1}\right\rfloor=\left\lfloor 24-\sqrt{59}\right\rfloor$ Or$59<64=8^2$ donc $\sqrt{59}<8$ et $24-\sqrt{59}>24-8=16$ ainsi $f(2)>16$ et

$$\boxed{12\text{ n'est pas solution de }E}$$

4. D'après ce qu'on vient de voir, pour tout $x\in D_E$ on a :

$$2x-\sqrt{5x-1}-1<\left\lfloor 2x-\sqrt{5x-1}\right\rfloor\leq 2x-\sqrt{5x-1}$$

Si x est solution de (E) on a $\left\lfloor 2x-\sqrt{5x-1}\right\rfloor=0$ et donc l'équation (E) équivaut à $2x-\sqrt{5x-1}-1<0\leq 2x-\sqrt{5x-1}$, soit

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lll}\sqrt{5x-1}> & 2x-1 & (E_1)\\ \sqrt{5x-1}\leq & 2x & (E_2)\end{array}\right.}$$

5. Résolvons ces deux inéquations. Tout d'abord la première :

$$\sqrt{5x-1}>2x-1\quad(E_1)$$

On distingue deux cas :

▶ <u>Cas 1 :</u> $2x-1\geq 0$ c'est-à-dire $x\geq \frac{1}{2}$
Alors on peut passer au carré dans l'équation car les deux cotés sont du même signe. On a alors :

$$\begin{aligned}(E_1) &\Longleftrightarrow 5x-1>(2x-1)^2\\ &\Longleftrightarrow 5x-1>4x^2-4x+1\\ &\Longleftrightarrow 4x^2-9x+2<0\end{aligned}$$

Un petit discriminant comme on aime : $\Delta = 9^2-4*4*2 = 81-32 = 49 = 7^2$. $4x^2-9x+2$ admet donc deux racines

$$r_1 = \frac{9+7}{8} = 2 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{9-7}{8} = \frac{1}{4}$$

Ainsi les solutions de (E_1) sur $[\frac{1}{2},+\infty[$ sont

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &=]\frac{1}{4},2[\cap[\frac{1}{2},+\infty[\cap D_E\\ &= [\frac{1}{2},2[\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_1) \text{ sur } [\tfrac{1}{2},+\infty[\text{ sont } \mathcal{S}_1 = [\tfrac{1}{2},2[}$$

▶ <u>Cas 2 :</u> $2x-1<0$ c'est-à-dire $x<\frac{1}{2}$
Dans ce cas, tous les réels $x\in D_E$ sont solutions car le membre de gauche est positif et celui de droite négatif.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_1) \text{ sur }]-\infty,\tfrac{1}{2}[\text{ sont } \mathcal{S}_1' = [\tfrac{1}{5},\tfrac{1}{2}]}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_1) \text{ sur } D_E \text{ sont } \mathcal{S} = \mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_1' = [\tfrac{1}{5},2[}$$

On fait la même chose pour (E_2)

$$\sqrt{5x-1}\leq 2x \quad (E_2)$$

On distingue deux cas :

▶ <u>Cas 1 :</u> $2x\geq 0$ c'est-à-dire $x\geq 0$
Alors on peut passer au carré dans l'équation car les deux cotés sont du même signe. On a alors :

$$\begin{aligned}(E_1) &\Longleftrightarrow 5x-1\leq (2x)^2\\ &\Longleftrightarrow 5x-1\leq 4x^2\\ &\Longleftrightarrow 4x^2-5x+1\geq 0\end{aligned}$$

Un petit discriminant comme on aime : $\Delta = 5^2-4*4*1 = 25-16 = 9 = 3^2$. $4x^2-5x+1$ admet donc deux racines

$$r_1 = \frac{5+3}{8} = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$$

Ainsi les solutions de (E_2) sur $[0,+\infty[$ sont

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &= (]-\infty,\frac{1}{4}]\cup[1,+\infty[)\cap[0,+\infty[\cap D_E\\ &= [\frac{1}{5},\frac{1}{4}]\cup[1,+\infty[\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_2) \text{ sur } [0,+\infty[\text{ sont } \mathcal{E}_2 = [\tfrac{1}{5},\tfrac{1}{4}] \cup [1,+\infty[}$$

- Cas 2 : $2x < 0$ c'est-à-dire $x < 0$
  Dans ce cas, aucun réel n'est solution car le membre de gauche est positif et celui de droite négatif.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_2) \text{ sur }]-\infty,0[\text{ sont } \mathcal{E}_2' = \emptyset}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_2) \text{ sur } D_E \text{ sont } \mathcal{E} = \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_2' = [\tfrac{1}{5},\tfrac{1}{4}] \cup [1,+\infty[}$$

6. x est solution de (E) si et seulement si il est solution de (E_1) et (E_2), l'ensemble des solutions correspond donc à l'intersection : $\mathcal{E} \cap \mathcal{S} = ([\frac{1}{5},\frac{1}{4}] \cup [1,+\infty[) \cap [\frac{1}{5},2[= [\frac{1}{5},\frac{1}{4}] \cup [1,2[$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sont } [\tfrac{1}{5},\tfrac{1}{4}] \cup [1,2[}$$

Correction 4.
Soit $x, y \in \mathbb{R}^2$ et $k = \lfloor x \rfloor$. On a donc $x \in [k, k+1[$. Il y a maintenant deux cas possibles

Cas 1 : $y \in [k, k+1[$ alors $\lfloor y \rfloor = k$ et donc $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.

Cas 3 : $y \notin [k, k+1[$ Comme $y \geq x$, on a $y > k+1$ et comme $\lfloor y \rfloor > y-1$ on a $\lfloor y \rfloor > k = \lfloor x \rfloor$
On a ainsi montré que la fonction était croissante.

Correction 5. Distinguons les cas selon la parité de $\lfloor x \rfloor$.

Cas 1 : $\lfloor x \rfloor$ est paire Dans ce cas, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\lfloor x \rfloor \in [2k, 2k+1[$, où $\lfloor x \rfloor = 2k$. On a alors $\frac{x}{2} \in [k, k+\frac{1}{2}[$ donc $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = k$ et $\frac{x+1}{2} \in [k+\frac{1}{2}, k+1[$, donc de nouveau $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = k$
On a bien l'égalité demandée.

Cas 2 : $\lfloor x \rfloor$ est impaire Dans ce cas, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\lfloor x \rfloor \in [2k+1, 2k+2[$, où $\lfloor x \rfloor = 2k+1$. On a alors $\frac{x}{2} \in [k+\frac{1}{2}, k+1[$ donc $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = k$ et $\frac{x+1}{2} \in [k+1, k+\frac{3}{2}$, donc cette fois $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = k+1$
On a bien l'égalité demandée.

III Racine carrée

Correction 6.

1. **Valeurs de a pour que R(a) soit bien défini :**
   Pour que $R(a)$ soit bien définie, il faut déjà que $a-1 \geq 0$, c'est-à-dire que $a \geq 1$. On suppose donc que $a \geq 1$. Sous cette hypothèse, on a donc que $a + 2\sqrt{a-1} > 0$ comme somme d'un terme strictement positif et d'un autre terme positif. Il reste à étudier $a - 2\sqrt{a-1}$.

$$a - 2\sqrt{a-1} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 2\sqrt{a-1} \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0.$$

   On est passé au carré tout en conservant l'équivalence car les deux termes sont bien positifs. Le discriminant de la dernière inéquation est strictement négatif ($\Delta = -4$) et ainsi, on a $a^2 - 2a + 1 > 0$, d'où $a - 2\sqrt{a-1} > 0$. Finalement, on obtient

$$\boxed{\mathcal{D}_R = [1,+\infty[.}$$

2. **Simplifions $\mathbf{R(a)}$:**
On suppose donc que $a \geq 1$. Ainsi, $R(a)$ a bien un sens et on peut calculer $R(a)^2$. On obtient
$$R(a)^2 = 2a + 2\sqrt{a^2-4a+4} = 2a+2\sqrt{(a-2)^2} = 2a+2|a-2|.$$
Ainsi, si $1 \leq a \leq 2$, on obtient
$$R(a)^2 = 2a+2(-a+2) = 4 \quad \text{donc} \quad R(a) = 2$$
car $R(a) = -2$ est impossible car $R(a)$ est un nombre positif comme somme de deux nombres positifs (somme de deux racines carrées). Et si $a \geq 2$, on obtient
$$R(a)^2 = 2a+2(a-2) = 4(a-1) \quad \text{donc} \quad R(a) = 2\sqrt{a-1}$$
car $R(a) = -2\sqrt{a-1}$ est impossible car $R(a)$ est un nombre positif comme somme de deux nombres positifs (somme de deux racines carrées).
On a donc obtenu :
$$\boxed{\forall a \geq 1,\ R(a) = \begin{cases} 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 2\sqrt{a-1} & \text{si } x \geq 2. \end{cases}}$$

Correction 7. La fonction f est bien définie si et seulement si $x^2-(m+1)x+m \geq 0$. Le discriminant donne : $\Delta = (m+1)^2-4m = (m-1)^2$.

- Cas 1 : si $m=1$: On obtient alors $\Delta = 0$ et ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2-(m+1)x+m \geq 0$. Ainsi : $\boxed{\mathcal{D}_{m=1} = \mathbb{R}}$.
- Cas 2 : si $m \neq 1$: On obtient alors $\Delta > 0$ et les deux racines distinctes sont alors : $\dfrac{m+1+|m-1|}{2}$ et $\dfrac{m+1-|m-1|}{2}$. Afin de calculer la valeur absolue, on doit encore distinguer deux cas :
  - ⋆ Si $m > 1$: les deux racines sont alors 1 et m et on obtient ainsi : $\boxed{\mathcal{D}_{m>1} =]-\infty, 1] \cup [m, +\infty[}$.
  - ⋆ Si $m < 1$: les deux racines sont alors m et 1 et on obtient ainsi : $\boxed{\mathcal{D}_{m<1} =]-\infty, m] \cup [1, +\infty[}$.

IV Exponentielle et logarithme

Correction 8.

1. $f(x) = x\ln\sqrt{e^{\frac{x}{2}}} + \left(\sqrt{e^{2\ln(2x-1)}}\right)^3$: La fonction f est bien définie si et seulement si $\sqrt{e^{\frac{x}{2}}} > 0$, $e^{\frac{x}{2}} \geq 0$, $2x-1 > 0$ et $e^{2\ln(2x-1)} \geq 0$. Comme toute exponentielle est strictement positive, la fonction f est bien définie si et seulement si $2x-1>0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$. Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_f =]\frac{1}{2}, +\infty[}$.
   Pour tout $x > \dfrac{1}{2}$, on a :
   $$f(x) = x\ln\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(e^{2\ln(2x-1)}\right)^{\frac{3}{2}} = x\ln(e^{\frac{x}{4}}) + \left(e^{\ln((2x-1)^2)}\right)^{\frac{3}{2}} = x \times \frac{x}{4} + ((2x-1)^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{x^2}{4} + (2x-1)^3$$
2. $g(x) = e^{\sqrt{\ln x}} + e^{(\ln x)^2}$. La fonction g est bien définie si et seulement si $x>0$ et $\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_g = [1, +\infty[}$.
   On ne peux RIEN simplifier car $\sqrt{\ln x} = (\ln x)^{\frac{1}{2}} \neq \dfrac{1}{2}\ln(x)$... De même, on a : $(\ln x)^2 \neq \ln(x^2)$... et on ne peux rien faire avec $(\ln x)^2$.

Correction 9. Résolution d'équations et d'inéquations avec $\ln$, $\exp$ et $x \mapsto a^x$.

1. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\ln(\mathbf{x^2 - 4e^2}) < \mathbf{1} + \ln(\mathbf{3x})$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D} =]2e, +\infty[$
   - ⋆ On a : $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x) \Leftrightarrow x^2 - 3xe - 4e^2 < 0$. Un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} =]2e, 4e[}$.

2. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\ln(\mathbf{1 + e^{-x}}) < \mathbf{x}$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
   - ⋆ $\ln(1 + e^{-x}) < x \Leftrightarrow 1 + e^{-x} < e^x \Leftrightarrow e^{2x} - e^x - 1 > 0$. On pose $X = e^x$ et on se ramène ainsi à la résolution d'une inéquation du second degré. On obtient $\boxed{\mathcal{S} = \left]\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), +\infty\right[}$.

3. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $|\ln \mathbf{x}| < \mathbf{1}$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}^{+\star}$.
   - ⋆ On distingue deux cas :
     - Si $x \geq 1$, alors $|\ln x| = \ln x$ et on doit résoudre $\ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$, donc $\mathcal{S}_\infty = [1, e[$.
     - Si $0 < x < 1$, alors $|\ln x| = -\ln x$ et on doit résoudre $-\ln x < 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$, donc $\mathcal{S}_2 = \left]\frac{1}{e}, 1\right[$.

   Ainsi, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, soit : $\boxed{\mathcal{S} = \left]\frac{1}{e}, e\right[}$.

4. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\ln(\mathbf{2x+4}) - \ln(\mathbf{6-x}) = \ln(\mathbf{3x-2}) - \ln(\mathbf{x})$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \left]\frac{2}{3}, 6\right[$.
   - ⋆ En utilisant les propriétés du logarithme népérien, on a : $\ln[x(2x+4)] = \ln[(3x-2)(6-x)]$. Ce qui est équivalent à $x(2x+4) = (3x-2)(6-x)$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En passant tout du même côté et en développant, on obtient : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{6}{5}, 2\right\}}$.

5. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{e^{3x} - 6e^{2x} + 8e^x > 0}$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
   - ⋆ On pose $X = e^x$ et on se ramène ainsi à résoudre $X^3 - 6X^2 + 8X > 0 \Leftrightarrow X(X-2)(X-4) > 0$. Un tableau de signe donne que c'est équivalent à : $0 < X < 2$ ou $X > 4$ ce qui est équivalent à : $e^x < 2$ ou $e^x > 4$ car une exponentielle est toujours strictement positive. La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$, on obtient $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, \ln(2)[\cup]\ln 4, +\infty[}$.

6. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{2^{2x+1} + 2^x = 1}$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- ⋆ On a : $2^{2x+1}+2^x=1 \;\Leftrightarrow\; 2\times(2^x)^2+2^x-1=0$. On pose $X=2^x$, et on doit résoudre $2X^2+X-1=0$. Le discriminant est 9 et les racines sont ainsi -1 et $\dfrac{1}{2}$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
2^{2x+1}+2^x=1 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^{x\ln 2}=-1 \\ \text{ou} \\ e^{x\ln 2}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad e^{x\ln 2}=\frac{1}{2} \qquad\qquad \text{car } e^{x\ln 2}>0 \\
&\Leftrightarrow \quad x\ln 2=-\ln 2 \qquad \text{car la fonction logarithme est strictement croissante} \\
&\Leftrightarrow \quad x=-1.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient $\boxed{\mathcal{S}=\{-1\}}$.

7. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{e^{3x}-e^{2x}-e^{x+1}+e\leq 0}$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.
   - ⋆ On pose $X=e^x$ et on doit alors résoudre $X^3-X^2-eX+e\leq 0$. On remarque que 1 est racine évidente et ainsi on peut factoriser par 1. Par identification des coefficients d'un polynôme, on obtient que : $X^3-X^2-eX+e\leq 0 \Leftrightarrow (X-1)(X^2-e)\leq 0$. Un tableau de signe donne $X\leq -\sqrt{e}$ ou $X\in[1,\sqrt{e}]$. On doit donc résoudre $e^x\leq -\sqrt{e}$ ou $e^x\in[1,\sqrt{e}]$. Or une exponentielle est toujours strictement positive donc on doit résoudre $e^x\in[1,\sqrt{e}]$. En composant par la fonction ln qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$, on obtient $x\in[0,\ln(\sqrt{e})]\Leftrightarrow x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.
   - ⋆ Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}=\left[0,\dfrac{1}{2}\right].}$

8. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $(\ln \mathbf{x})^{\mathbf{2}}-\mathbf{3}\ln\mathbf{x}-\mathbf{4}\leq \mathbf{0}$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D}=\mathbb{R}^{+\star}$.
   - ⋆ On pose $X=\ln(x)$ et on doit alors résoudre $X^2-3X-4\leq 0$. Le discriminant vaut $\Delta=25$ et les racines sont -1 et 4. Ainsi, un tableau de signe donne que : $X^2-3X-4\leq 0\Leftrightarrow -1\leq X\leq 4$. On doit donc résoudre $-1\leq \ln(x)\leq 4$. En composant par la fonction exp qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient que : $e^{-1}\leq x\leq e^4$.
   - ⋆ Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}=\left[e^{-1},e^4\right].}$

9. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{2e^{2x}-e^{x}-1\leq 0}$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.
   - ⋆ On pose $X=e^x$ et on doit résoudre $2X^2-X-1\leq 0$. On obtient $X\in\left]-\dfrac{1}{2},1\right[$, soit $e^x>-\dfrac{1}{2}$ et $e^x<1$. La première équation est toujours vraie, et la deuxième équivaut à $x<0$. On a donc : $\boxed{\mathcal{S}=]-\infty,0]}$.

10. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{2}\ln(\mathbf{x})+\ln(\mathbf{2x-1})>\ln(\mathbf{2x+8})+\mathbf{2}\ln(\mathbf{x-1})$:**

    - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D}=]1,+\infty[$.

- ⋆ En utilisant les propriétés du logarithme népérien et le fait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on doit résoudre $5x^2 - 14x + 8 < 0$. En n'oubliant pas le domaine de définition, on obtient $\boxed{\mathcal{S} =]1, 2[}$.

11. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{4e^x - 3e^{\frac{x}{2}} \geq 0}$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
   - ⋆ On pose $X = e^{\frac{x}{2}}$ et cela revient à résoudre $4X^2 - 3X \geq 0 \Leftrightarrow X(4X - 3) \geq 0$. Ce qui est équivalent à $e^{\frac{x}{2}} \leq 0$ ou $e^{\frac{x}{2}} \geq \dfrac{3}{4}$. La première inéquation est impossible et la deuxième donne $\boxed{\mathcal{S} = \left[2\ln\left(\dfrac{3}{4}\right), +\infty\right[}$.

12. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{e^x - e^{-x} = 3}$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
   - ⋆ On met tout sur le même dénominateur et on obtient : $\dfrac{e^{2x} - 3e^x - 1}{e^x} = 0$. On pose $X = e^x$ et on doit donc résoudre $X^2 - 3X - 1 = 0$. En repassant à x, on obtient $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\ln\left(\dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)\right\}}$.

13. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{9^x - 2 \times 3^x - 8 > 0}$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
   - ⋆ On peut remarquer que : $9^x = (3^x)^2$. Ainsi on pose $X = 3^x$ et on obtient que : $X^2 - 2X - 8 > 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 36$ et les racines sont -2 et 4. Ainsi on doit résoudre $3^x < -2$ ou $3^x > 4$. Or on sait que $3^x = e^{x \ln 3}$ ainsi la première inéquation est impossible et la deuxième inéquation donne : $3^x > 4 \Leftrightarrow x > \dfrac{\ln 4}{\ln 3}$ en composant par la fonction ln qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et car $\ln 3 > 0$. On a donc : $\boxed{\mathcal{S} = \left]\dfrac{\ln 4}{\ln 3}, +\infty\right[}$.

Correction 10. Utilisation d'une étude de fonction.

1. **Montrons que $\forall \mathbf{x} > \mathbf{0},\ \mathbf{x} - \dfrac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2}} \leq \ln(\mathbf{1} + \mathbf{x}) \leq \mathbf{x}$:**
   On démontre l'inégalité en deux temps.

   - Montrons d'abord que pour tout $x > 0$: $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x)$:

     On pose pour cela la fonction $f(x) = \ln(1 + x) - x + \dfrac{x^2}{2}$. Cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et elle est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme composée et somme de fonctions dérivables. On obtient pour tout $x \geq 0$: $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x} - 1 + x = \dfrac{x^2}{1 + x}$. Comme on est sur $\mathbb{R}^+$, on a : $f'(x) \geq 0$. On obtient donc les variations suivantes en utilisant le fait que $f(0) = 0$:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$

Ainsi 0 est le minimum de f sur $\mathbb{R}^+$ et on obtient bien que pour tout $x > 0$: $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0$, à savoir $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

- On montre de même la deuxième inégalité en étudiant la fonction $g(x) = \ln(1+x) - x$.

2. **Montrons que $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^+,\ \mathbf{e^x} - \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2}} \geq \mathbf{1}$:**

   Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - 1$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions définies et dérivables. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$f'(x) = e^x - x.$$

   Or on a montré dans le cours (il faudrait refaire le raisonnement) que l'on a $e^x \geq x+1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc on a $f'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$. On obtient alors le tableau de variation suivant

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

   Justifions les limites aux bornes : on a : $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$. L'étude en $+\infty$ fait apparaître une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination, on met en facteur le terme dominant à savoir e^x et on obtient ainsi : $f(x) = e^x \left(1 - \frac{x^2}{2e^x} - \frac{1}{e^x}\right)$. Par croissance comparée, on sait que $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2e^x} = 0$. Ainsi par quotient, somme et produit de limite, on obtient que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Ainsi, 0 est le minimum de f atteint en $x = 0$ et donc la fonction f est toujours positive ou nulle. Ainsi, on a bien

   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq \frac{x^2}{2} + 1.}$$