Correction TD 4 - Suites réelles usuelles

I Suites usuelles

Correction 1.

1.
   - C'est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 2, ainsi
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 + 3n.$$
   - Elle diverge vers $+\infty$.
   - $S = 2(n+1) + 3\sum_{k=0}^{n} k = 2(n+1) + 3\frac{n(n+1)}{2}$.
2.
   - C'est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 2, ainsi
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 + \frac{n}{2}.$$
   - Elle diverge vers $+\infty$.
   - $S = 2(n+1) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k = 2(n+1) + \frac{n(n+1)}{4}$.
3.
   - C'est une suite arithmétique de raison -5 et de premier terme 2, ainsi
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 - 5n.$$
   - Elle diverge vers $-\infty$.
   - $S = 2(n+1) - 5\sum_{k=0}^{n} k = 2(n+1) - 5\frac{n(n+1)}{2}$.
4.
   - C'est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme 2, ainsi
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 23^n.$$
   - Comme $3 > 1$, la suite diverge vers $+\infty$.
   - $S = 2\sum_{k=0}^{n} 3^k = 3^{n+1} - 1$.
5.
   - C'est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 2, ainsi
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
   - Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, la suite converge vers 0.
   - $S = 2\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

6.
- C'est une suite géométrique de raison -5 et de premier terme 2, ainsi
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2(-5)^n.$$
- Comme $-5 < -1$, la suite n'admet pas de limite, elle est divergente de deuxième espèce.
- $S = 2\sum_{k=0}^{n}(-5)^k = \frac{1}{3}\left(1-(-5)^{n+1}\right)$.

7.
- C'est une suite arithmético-géométrique. On applique la méthode vue en cours pour trouver l'expression de u_n en fonction de n. On obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{7}{2} \times 3^n - \frac{3}{2}$.
- Comme $3 > 1$, elle diverge vers $+\infty$.
- $S = \frac{7}{4}\left(3^{n+1}-1\right) - \frac{3(n+1)}{2}$.

8.
- C'est une suite arithmético-géométrique. On applique la méthode vue en cours pour trouver l'expression de u_n en fonction de n. On obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{16}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{9}$.
- Comme $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, elle converge vers $\frac{2}{9}$.
- $S = \frac{32}{27}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{2(n+1)}{9}$.

9.
- C'est une suite arithmético-géométrique. On applique la méthode vue en cours pour trouver l'expression de u_n en fonction de n. On obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 4(-1)^n - 2$.
- Elle n'admet pas de limite, elle est divergente de deuxième espèce.
- $S = 2\left(1-(-1)^{n+1}\right) - 2(n+1)$.

Correction 2.

1. Comme toujours pour ce genre de question, on fait une récurrence.
   - On montre par récurrence sur $n \geq 3$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\quad u_n$ défini et $u_n > 1$.
   - Initialisation : pour $n = 3$:
     On a : $u_1 = -1$ puis $u_2 = -7$ et $u_3 = \frac{37}{5} > 1$. Ainsi, $\mathcal{P}(3)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \geq 3$, on suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n > 1$, donc $u_n - 1 \neq 0$ et u_{n+1} est bien défini. De plus, on a
     $$u_{n+1} > 1 \iff \frac{5u_n - 2}{u_n + 2} > 1 \iff 5u_n - 2 > u_n + 2 \iff u_n > 1.$$
     Ici on a utilisé le fait que $u_n > 1$ d'après $\mathcal{P}(n)$, et donc que $u_n + 2 > 0$. On arrive $u_n > 1$ qui est bien vrai, donc par équivalences, $u_{n+1} > 1$ est vrai aussi. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\forall n \geq 3, \; u_n > 1$.
2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car $u_0, \; u_1, \; u_2$ ne sont pas égaux à 1 et ensuite on a $\forall n \geq 3, u_n > 1$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $u_n - 1 \neq 0$ et v_n bien défini.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$:
   $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}-1} = \frac{\frac{5u_n-2-2u_n-4}{u_n+2}}{\frac{5u_n-2-u_n-2}{u_n+2}} = \frac{3u_n-6}{4u_n-4} = \frac{3}{4}\frac{u_n-2}{u_n-1} = \frac{3}{4}v_n.$$
   Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme 2.

4. On en déduit la formule explicite de v_n :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$
En remarquant que : $u_n(v_n - 1) = v_n - 2$ et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était toujours différente de 1, on obtient que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1} \Rightarrow u_n = \frac{2(\frac{3}{4})^n - 2}{2(\frac{3}{4})^n - 1}.$$
5. Comme $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et ainsi, on a : $\lim\limits_{n\to\mathbb{N}} u_n = 2$.

Correction 3. Toutes ces suites sont des suites linéaires récurrentes d'ordre deux, on les résout en étudiant l'équation caractéristique. Je ne donne ici que le résultat.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{1}{4}\left(3^{n+1} + (-1)^n\right)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (1-n)2^n$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(2 - \dfrac{5}{4}n\right)(-4)^n$
4. Suite de Fibonacci, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n\left(\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right)$.

Correction 4. Pour toutes ces suites, on conjecture le résultat en itérant la relation de récurrence puis on le démontre rigoureusement par récurrence. Je ne fais pas ici la récurrence mais elle doit être présente dans toute copie. Je ne donne ici que le résultat, à savoir u_n en fonction de n.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{3^{n-1}}{2^{n-1}} n u_1 = \dfrac{3^{n-1}}{2^{n-1}} n$.
2. Méthode 1 : on conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 2^3 \times 2^{3^2} \times \cdots \times 2^{3^{n-1}} u_0^{3^n} = 2^{\sum\limits_{k=0}^{n} 3^k} = 2^{\frac{3^{n+1}-1}{2}}$ et on fait une récurrence.
Méthode 2 : on pose $u_n = 2^{v_n}$, et on essaye de calculer la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a $u_0 = 2 = 2^1$, donc $v_0 = 1$. De plus, on a :
$$u_{n+1} = 2(u_n)^3 \ \Leftrightarrow\ 2^{v_{n+1}} = 2 \times (2^{v_n})^3 \ \Leftrightarrow\ 2^{v_{n+1}} = 2^{3v_n+1} \ \Leftrightarrow\ v_{n+1} = 3v_n + 1.$$
On en déduit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. La méthode habituelle donne ensuite $v_n = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{3^n}{2} - \dfrac{1}{2}$, soit $u_n = 2^{\frac{3^{n+1}-1}{2}}$.

II Etude de suites

Correction 5.

1. Comme toujours pour ce genre de question, on fait une récurrence.
   - On montre par récurrence sur $n \geq 3$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\quad u_n$ défini et $u_n > 1$.
   - Initialisation : pour $n = 3$:
     On a : $u_1 = -1$ puis $u_2 = -7$ et $u_3 = \dfrac{37}{5} > 1$. Ainsi, $\mathcal{P}(3)$ est vraie.

- Hérédité : soit $n \geq 3$, on suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n > 1$, donc $u_n - 1 \neq 0$ et u_{n+1} est bien défini. De plus, on a

$$u_{n+1} > 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{5u_n - 2}{u_n + 2} > 1 \;\Leftrightarrow\; 5u_n - 2 > u_n + 2 \;\Leftrightarrow\; u_n > 1.$$

  Ici on a utilisé le fait que $u_n > 1$ d'après $\mathcal{P}(n)$, et donc que $u_n + 2 > 0$. On arrive $u_n > 1$ qui est bien vrai, donc par équivalences, $u_{n+1} > 1$ est vrai aussi. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\forall n \geq 3,\ u_n > 1$.

2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car $u_0,\ u_1,\ u_2$ ne sont pas égaux à 1 et ensuite on a $\forall n \geq 3, u_n > 1$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $u_n - 1 \neq 0$ et v_n bien défini.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} \;=\; \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{5u_n - 2 - 2u_n - 4}{u_n + 2}}{\frac{5u_n - 2 - u_n - 2}{u_n + 2}} = \frac{3u_n - 6}{4u_n - 4} = \frac{3}{4}\frac{u_n - 2}{u_n - 1} = \frac{3}{4}v_n.$$

   Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme 2.
4. On en déduit la formule explicite de v_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

   En remarquant que : $u_n(v_n - 1) = v_n - 2$ et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était toujours différente de 1, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1} \Rightarrow u_n = \frac{2(\frac{3}{4})^n - 2}{2(\frac{3}{4})^n - 1}.$$

5. Comme $-1 < \frac{3}{4} < 1$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et ainsi, on a : $\lim_{n\to\mathbb{N}} u_n = 2$.

Correction 6.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 - u_{n+1} = 1 + u_n^2 - 2u_n = (1 - u_n)^2$.
2. On pose $v_n = 1 - u_n$. On a alors $v_{n+1} = v_n^2$. Essayons de calculer v_n : on a $v_1 = v_0^2$, $v_2 = v_0^4$, $v_3 = v_0^8$. On conjecture donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0^{2^n}$.
   Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : $\mathcal{P}(n)$: $\quad v_n = v_0^{2^n}$.
   - Initialisation : pour $n = 0$:
     On a : $v_0^{2^0} = v_0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. On a vu que : $v_{n+1} = v_n^2$. On utilise alors l'hypothèse de récurrence et on obtient

$$v_{n+1} = \left(v_0^{2^n}\right)^2 = v_0^{2^{n+1}}.$$

     Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0^{2^n}.$$

   On obtient donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1 - (1 - u_0)^{2^n}$.
   - Si $1 - u_0 > 1 \;\Leftrightarrow\; u_0 < 0$, alors : $\lim_{n\to+\infty}(1 - u_0)^{2^n} = +\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
   - Si $u_0 = 0$, alors $1 - u_0 = 1$ et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   - Si $-1 < 1 - u_0 < 1 \;\Leftrightarrow\; 0 < u_0 < 2$, alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

- Si $u_0 = 2$, alors $1 - u_0 = -1$ et $(1-u_0)^{2^n} = 1$, et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $1 - u_0 < -1 \Leftrightarrow u_0 > 2$, alors $(1-u_0)^2 > 1$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-u_0)^{2^n} = +\infty$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Correction 7. On définit deux suites $(\mathbf{u_n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(\mathbf{v_n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par

$$\mathbf{u_1 = 1 \quad v_1 = 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}}.$$

1. **On pose, pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbf{w_n = v_n - u_n}$. Donner l'expression de $(\mathbf{w_n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$:**
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :
$$w_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{v_n - u_n}{12} = \frac{1}{12} w_n.$$
Ainsi la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{12}$ et de premier terme $w_1 = v_1 - u_1 = 11$. On en déduit donc l'expression explicite de w_n :
$$\boxed{\forall n \geq 1,\ w_n = w_1 \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} = 11 \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}.}$$

2. **Montrer que $(\mathbf{u_n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(\mathbf{v_n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes :**
   - Étude de la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$:
   Soit $n \geq 1$, on a :
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{2(v_n - u_n)}{3} = \frac{2}{3} w_n.$$
   Or on connaît l'expression de w_n, on obtient donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3} \times 11 \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \geq 0.$$
   Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante.
   - Étude de la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$:
   Soit $n \geq 1$, on a :
   $$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n - v_n}{4} = \frac{-1}{4} w_n.$$
   Or on connaît l'expression de w_n, on obtient donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = \frac{-11}{4} \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \leq 0.$$
   Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante.
   - Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$:
   On a montré à la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $v_n - u_n = 11 \left(\dfrac{1}{12}\right)^{n-1}$. Comme : $-1 < \dfrac{1}{12} < 1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{12}\right)^{n-1} = 0$. Puis par propriété sur le produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

   Ainsi, on a donc montré que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes. D'après le théorème sur les suites adjacentes, $\boxed{\text{elles convergent donc vers la même limite.}}$

3. **On pose pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbf{t_n = 3u_n + 8v_n}$. Donner l'expression de $(\mathbf{t_n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et en déduire la limite de $(\mathbf{u_n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(\mathbf{v_n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$:**

- Expression de t_n pour tout $n \geq 1$:
Soit $n \geq 1$, on a : $t_{n+1} = 3\dfrac{u_n + 2v_n}{3} + 8\dfrac{u_n + 3v_n}{4} = 3u_n + 8v_n = t_n$. Ainsi
$\boxed{\text{la suite } (t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \text{ est constante égale à } t_1 = 3u_1 + 8v_1 = 99.}$
- Calcul de la valeur de la limite l :
Comme la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est constante, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ 3u_n + 8v_n = 99$. De plus on a démontré à la question 2 que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ convergent vers la même limite l et ainsi par propriété sur les produits et somme de limites, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3u_n + 8v_n = 11l$. Par passage à la limite dans l'égalité : $3u_n + 8v_n = 99$, on obtient donc que
$$11l = 99 \Leftrightarrow \boxed{l = 9.}$$

Correction 8. **Soient $(\mathbf{a_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ et $(\mathbf{b_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\mathbf{a_0 = 0}$, $\mathbf{b_0 = 1}$ et pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$**
$$\mathbf{a_{n+1} = -2a_n + b_n} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{b_{n+1} = 3a_n}.$$

1. **Démontrer que la suite $(\mathbf{a_n + b_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ est constante :**
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$a_{n+1} + b_{n+1} = -2a_n + b_n + 3a_n = a_n + b_n.$$
Ainsi $\boxed{\text{la suite } (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante}}$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n + b_n = a_0 + b_0 = 1$. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + b_n = 1.}$
2. **Pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbf{a_n}$ en fonction de $\mathbf{n}$:**
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, en utilisant le fait que pour tout $n \in \mathbb{N},\ a_n + b_n = 1$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n = 1 - a_n$. Ainsi on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$a_{n+1} = -2a_n + b_n \Leftrightarrow a_{n+1} = 1 - 3a_n.$$
On reconnaît une suite arithmético-géométrique .
   - Calcul de la limite éventuelle : on résout : $l = 1 - 3l \Leftrightarrow l = \dfrac{1}{4}$.
   - Étude d'une suite auxiliaire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = a_n - \dfrac{1}{4}$. Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$v_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{4} = 1 - 3a_n - \frac{1}{4} = -3\left(a_n - \frac{1}{4}\right) = -3v_n.$$
   Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = a_0 - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4}$.
   On en déduit l'expression explicite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = -\dfrac{1}{4}(-3)^n$.
   - Expression explicite de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n = v_n + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4}(-3)^n + \dfrac{1}{4}$.On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{1}{4}\left(1 - (-3)^n\right).}$
3. **Pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbf{b_n}$ en fonction de $\mathbf{n}$:**
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $b_{n+1} = 3a_n$, on a : $b_n = 3a_{n-1}$. Puis en utilisant le résultat de la question précédente, on obtient que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \dfrac{3}{4}\left(1 - (-3)^{n-1}\right).}$