Correction TD 3 - Sommes, produits et récurrences

I Factorielles

Correction 1.

- $A = \dfrac{7!}{6!} = \dfrac{7 \times 6!}{6!} = \boxed{7.}$
- $B = \dfrac{3 \times 4!}{(3!)^2} = \dfrac{3 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 2} = \boxed{2.}$
- $C = \dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = \boxed{n.}$
- $D = \dfrac{(n+1)!}{(n-3)!} = \dfrac{(n+1) \times n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)!}{(n-3)!} = \boxed{(n+1)n(n-1)(n-2).}$
- $E = \dfrac{(n+1)!}{(n-2)!} + \dfrac{n!}{(n-1)!} = (n+1)n(n-1) + n = n(n^2 - 1 + 1) = \boxed{n^3.}$

II Calculs de sommes

Correction 2.

1. **Calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^{2k}$:**
   On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique et on obtient donc en utilisant le fait que $x^{2k} = (x^2)^k$:

$$\sum_{k=0}^{n} x^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (x^2)^k = \boxed{\begin{cases} \dfrac{1-x^{2n+2}}{1-x^2} & \text{si } x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \text{ ou } x = -1. \end{cases}}$$

   Calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^{2k+1}$:
   On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique et on obtient donc en utilisant le fait que $x^{2k+1} = (x^2)^k \times x$:

$$\sum_{k=0}^{n} x^{2k+1} = x\sum_{k=0}^{n}(x^2)^k = \boxed{\begin{cases} x \times \dfrac{1-x^{2n+2}}{1-x^2} & \text{si } x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \\ -(n+1) & \text{si } x = -1. \end{cases}}$$

2. **Calcul de $\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} a^k 2^{3k} x^{-k}}$:**
   On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique et on obtient donc en utilisant le fait que $a^k 2^{3k} x^{-k} = a^k (2^3)^k \times \dfrac{1}{x^k} = a^k \times 8^k \times \left(\dfrac{1}{x}\right)^k = \left(\dfrac{8a}{x}\right)^k$:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k 2^{3k} x^{-k} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{8a}{x}\right)^k = \boxed{\begin{cases} \dfrac{1-\left(\frac{8a}{x}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{8a}{x}\right)} & \text{si } x \neq 8a \\ n+1 & \text{si } x = 8a. \end{cases}}$$

3. **Calcul de $\boldsymbol{\sum_{i=0}^{n}(i^2+n+3)}$:**
   Par linéarité de la somme, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n}(i^2+n+3) &= \sum_{i=0}^{n} i^2 + (n+3)\sum_{i=0}^{n} 1 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+3)(n+1) \\ &= \boxed{\frac{n+1}{6}\left(2n^2+7n+18\right)} \end{aligned}$$

4. **Calcul de $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3}$:**
   On commence par développer la puissance cube à l'intérieur de la somme puis on utilise la linéarité de la somme. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3 &= \sum_{i=1}^{n}\left(8i^3-12i^2+6i-1\right) \\ &= 8\sum_{i=1}^{n} i^3 - 12\sum_{i=1}^{n} i^2 + 6\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1. \end{aligned}$$

   On utilise ensuite le formulaire sur les sommes et on obtient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3 &= 8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - 12\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6\frac{n(n+1)}{2} - n \\ &= \boxed{n^2(4n^2+4n+1)}. \end{aligned}$$

   Une autre solution consiste à faire la somme des paires entre 1 et $2n$ puis simplifier l'expression avec la somme de tous les entiers au cube.

5. **Calcul de $\sum_{k=2}^{n^2}(1-a^2)^{2k+1}$:**

On commence par utiliser les propriétés sur les puissances et on obtient que : $(1-a^2)^{2k+1} = [(1-a^2)^2]^k \times (1-a^2)^1$. Par linéarité de la somme et en reconnaissant de plus la somme d'une suite géométrique, on a : $\sum_{k=2}^{n^2}(1-a^2)^{2k+1} = (1-a^2)\sum_{k=2}^{n^2}[(1-a^2)^2]^k$. On doit donc étudier deux cas selon que $(1-a^2)^2 \neq 1$ ou que $(1-a^2)^2 = 1$.

- Cas 1 : si $(1-a^2)^2 \neq 1$:
  On obtient alors : $\sum_{k=2}^{n^2}(1-a^2)^{2k+1} = (1-a^2) \times ((1-a^2)^2)^2 \times \frac{1-[(1-a^2)^2]^{n^2-1}}{1-(1-a^2)^2} = (1-a^2)^5 \times \frac{1-(1-a^2)^{2n^2-2}}{2a^2-a^4} = \boxed{(1-a^2)^5 \times \frac{1-(1-a^2)^{2n^2-2}}{a^2(2-a^2)}.}$
- Cas 2 : si $(1-a^2)^2 = 1$:
  Regardons à quels a cela correctionrespond : $(1-a^2)^2 = 1 \Leftrightarrow 1-a^2 = 1$ ou $1-a^2=-1 \Leftrightarrow a^2 = 0$ ou $a^2 = 2 \Leftrightarrow a = -\sqrt{2}$ ou $a=0$ ou $a=\sqrt{2}$. Calculons alors la somme pour ces a : $\sum_{k=2}^{n^2}(1-a^2)^{2k+1} = (1-a^2)\sum_{k=2}^{n^2}1 = (1-a^2)\times(n^2-1)$. Il faut alors distinguer encorrectione deux cas :

  ⋆ Si $a=0$ alors $1-a^2 = 1$ et $\boxed{\sum_{k=2}^{n^2}(1-a^2)^{2k+1} = n^2-1.}$

  ⋆ Si $a=-\sqrt{2}$ ou $a=\sqrt{2}$ alors $1-a^2=-1$ et $\boxed{\sum_{k=2}^{n^2}(1-a^2)^{2k+1} = -n^2+1.}$

6. **Calcul de $\sum_{k=1}^{n}(3\times 2^k+1)$:**

$\sum_{k=1}^{n}(3\times 2^k+1) = 3\sum_{k=1}^{n}2^k + \sum_{k=1}^{n}1 = 3\times 2\times\frac{1-2^n}{1-2} + n$ par linéarité et car $2 \neq 1$. Donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(3\times 2^k+1) = 6(2^n-1)+n.}$$

7. **Calcul de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\frac{k}{n}\right)$:**

$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k = \frac{1}{n}\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ car $e^{\frac{1}{n}} \neq 1$. Ainsi $\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}.}$

8. **Calcul de $\sum_{k=0}^{n}(2k-1+2^k)$:**

$\sum_{k=0}^{n}(2k-1+2^k) = 2\sum_{k=0}^{n}k - \sum_{k=0}^{n}1 + \sum_{k=0}^{n}2^k = 2\frac{n(n+1)}{2} - (n+1) + \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$ par linéarité et car

$2 \neq 1$. Ainsi $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k-1+2^k) = n^2+2^{n+1}-2.}$

9. **Calcul de** $\displaystyle\sum_{\mathbf{j=0}}^{\mathbf{n}}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{j}}\mathbf{a^j}$ **:**

   $\boxed{\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j = (1+a)^n}$ en reconnaissant un binôme de Newton car $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j1^{n-j}$

   Calcul de $\displaystyle\sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n+1}}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{j}}\mathbf{a^j}$ **:**

   On se ramène à la formule du binôme de Newton en utilisant la relation de Chasles : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j}a^j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j - \binom{n}{0}a^0 + \binom{n}{n+1}a^{n+1}$. Par convention, on a : $\binom{n}{n+1} = 0$ et ainsi on obtient en utilisant le binôme de Newton : $\boxed{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j}a^j = (1+a)^n-1.}$

10. **Calcul de** $\displaystyle\sum_{\mathbf{i=0}}^{\mathbf{n}}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{i}}(\mathbf{-1})^{\mathbf{i}}$ **:**

    $\boxed{\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j = 0}$ grâce au binôme de Newton car $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j1^{n-j} = (1-1)^n$.

11. **Calcul de** $\displaystyle\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\binom{\mathbf{n+1}}{\mathbf{i}}(\mathbf{-1})^{\mathbf{i}}$ **:**

    On se ramène à la formule du binôme de Newton en utilisant la relation de Chasles : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}(-1)^i = \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}(-1)^i - \binom{n+1}{0}(-1)^0 - \binom{n+1}{n+1}(-1)^{n+1} = (1-1)^{n+1} - 1 - (-1)^{n+1} = -1 + (-1)^{n+2} = -1+(-1)^n = (-1)^n-1$. Ainsi on obtient que : $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}(-1)^i = (-1)^n-1.}$

12. **Calcul de** $\displaystyle\sum_{\mathbf{j=0}}^{\mathbf{n}}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{j}}\frac{(\mathbf{-1})^{\mathbf{j-1}}}{\mathbf{2^{j+1}}}$ **:**

    On se ramène à la formule du binôme de Newton en utilisant les propriétés sur les puissances. On obtient $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(-1)^{j-1}}{2^{j+1}} = \frac{-1}{2}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{-1}{2}\right)^j = \frac{-1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{\frac{-1}{2^{n+1}}.}$

13. **Calcul de** $\displaystyle\sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{n-1}}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3^k}}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$ **:**

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k 1^{n-k}$. Afin de pouvoir utiliser la formule du binôme de Newton, on utilise la relation de Chasles pour obtenir : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k 1^{n-k} - \binom{n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(1+\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n - \frac{1}{3^n} = \boxed{\frac{4^n-1}{3^n}.}$

Correction 3.

1. **Calcul de $\mathbf{S_1 = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j}}$:**

   On peut déjà remarquer que : $\displaystyle S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = 0\times\binom{n}{0} + \sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j} = \sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j}$.
   Ici on ne sait pas calculer la somme sans transformation car il y a le j. On utilise d'abord une propriété des coefficients binomiaux, et on obtient :

   $$S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = \sum_{j=1}^{n} n\binom{n-1}{j-1} = n\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}$$

   car n est alors indépendant de l'indice de sommation donc on peut le sortir de la somme. Pour se ramener à du binôme de Newton, on commence par poser le changement de variable : $i = j-1$ et on obtient $\displaystyle S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}$ (c'est ici qu'il est mieux d'être passé au début d'une somme allant de 0 à n à une somme allant de 1 à n car sinon on aurait un indice commencant à -1. Si on n'a pas changé la somme au début, une autre méthode est alors de faire ici une relation de Chasles afin d'isoler l'indice -1). On reconnaît alors un binôme de Newton et on obtient $\boxed{\displaystyle S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = n2^{n-1}.}$

2. **Calcul de $\mathbf{T = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}}$:**

   Il s'agit ici d'appliquer deux fois de suite la propriété sur les coefficients binomiaux : $\displaystyle T = n\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1}$ en reprenant les calculs faits au-dessus. On pourra aussi remarquer que la somme T peut être commencée à 2. Puis en réappliquant la propriété sur les coefficients binomiaux : $(k-1)\binom{n-1}{k-1} = (n-1)\binom{n-2}{k-2}$, on obtient que : $\displaystyle T = n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}$. On effectue alors le changement de variable $j = k-2$ et on obtient $\displaystyle T = n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}$. Donc en utilisant le binôme de Newton, on a : $\boxed{T = n(n-1)2^{n-2}.}$

Calcul de $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$:

Comme $k^2 = k(k-1)+k$ et par linéarité de la somme, on obtient que : $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = T + S_1 = \boxed{n(n+1)2^{n-2}.}$

3. **Calcul de $\mathbf{S_3} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i}$:**

Là encorrectione, il faut commencer par utiliser la propriété sur les coefficients binomiaux. Comme $(i+1)\binom{n+1}{i+1} = (n+1)\binom{n}{i}$, on obtient que : $\frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{i+1}$. Ainsi, la somme devient : $S_3 = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{i+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1}$ car $\frac{1}{n+1}$ ne dépend pas de l'indice de sommation i. On fait le changement d'indice $j = i+1$ et on utilise aussi la relation de Chasles pour faire apparaître le binôme de Newton. On obtient $S_3 = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j} = \frac{1}{n+1}\left[\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j} - \binom{n+1}{0}\right]$. Ainsi, on obtient

$$\boxed{S_3 = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \frac{1}{n+1}\left[2^{n+1}-1\right].}$$

Correction 4.

1. Dès que l'on a une soustraction entre deux sommes de même type avec juste un décalage d'indice, il faut reconnaître une somme télescopique et savoir la calculer. Le calcul utilise un ou plusieurs changements d'indice puis la relation de Chasles.

   - **Calcul de $\mathbf{S} = \sum_{i=0}^{n}(\mathbf{x_{i+1}} - \mathbf{x_i})$:**

     $S = \sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}-x_i) = \sum_{i=0}^{n} x_{i+1} - \sum_{i=0}^{n} x_i$ par linéarité. On pose alors le changement d'indice : $j = i+1$ dans la première somme et on obtient : $S = \sum_{j=1}^{n+1} x_j - \sum_{i=0}^{n} x_i$. Comme l'indice de sommation est muet, on a : $S = \sum_{i=1}^{n+1} x_i - \sum_{i=0}^{n} x_i$. La relation de Chasles donne : $S = \sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} x_i - x_0 = \boxed{x_{n+1} - x_0.}$

   - **Calcul de $S' = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x_{i+1}} - \mathbf{x_{i-1}})$:**

     $S' = \sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_{i+1} - \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}$ par linéarité. On pose alors le changement d'indice : $j=i+1$ dans la première somme et le changement $k=i-1$ dans la deuxième somme et on obtient : $S'=\sum_{j=2}^{n+1} x_j - \sum_{k=0}^{n-1} x_k$. Comme l'indice de sommation est muet, on a : $S'=\sum_{i=2}^{n+1} x_i - \sum_{i=0}^{n-1} x_i$. La relation de Chasles donne : $S'=\sum_{i=2}^{n-1} x_i + x_n + x_{n+1} - \sum_{i=2}^{n-1} x_i - x_0 - x_1 = \boxed{x_{n+1}+x_n-x_0-x_1.}$

2. **Calcul de $\mathbf{S}=\sum_{\mathbf{k=3}}^{\mathbf{n}} \ln\left[\frac{\mathbf{k^2}}{\mathbf{(k+1)(k-2)}}\right]$:**
On transforme cette somme en utilisant les propriétés du logarithme népérien et on obtient : $\ln\left(\frac{k^2}{(k+1)(k-2)}\right)=2\ln(k)-\ln(k+1)-\ln(k-2)$.
Ainsi transformée, la somme S est bien de type télescopique car on a bien une soustraction de 3 sommes de même type avec juste des décalages d'indice. En effet, par linéarité, on obtient : $S=2\sum_{k=3}^{n}\ln(k)-\sum_{k=3}^{n}\ln(k+1)-\sum_{k=3}^{n}\ln(k-2)$. On pose le changement d'indice $j=k+1$ dans la deuxième somme et le changement $i=k-2$ dans la troisième somme et on obtient

$$\begin{aligned} S &= 2\sum_{k=3}^{n}\ln(k)-\sum_{j=4}^{n+1}\ln(j)-\sum_{j=1}^{n-2}\ln(j) \\ &= 2\ln(3)+2\ln(n-1)+2\ln(n)-\ln(n-1)-\ln(n)-\ln(n+1)-\ln(1)-\ln(2)-\ln(3) \\ &= \boxed{\ln\left(\frac{3n(n-1)}{2(n+1)}\right).} \end{aligned}$$

Correction 5.

1. **Calcul de $\mathbf{S}=\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(k+1)(k+2)}}$:**
   - On commence par montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $k\in\mathbb{N}^\star$: $\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{a}{k+1}+\frac{b}{k+2}$. En mettant au même dénominateur, on obtient que : $\forall k\in\mathbb{N}^\star,\quad \frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(a+b)k+2a+b}{(k+1)(k+2)}$. Cette relation doit être vraie pour tout $k\in\mathbb{N}^\star$ donc, par identification, on obtient que : $\begin{cases} a+b &= 0\\ 2a+b &= 1\end{cases}$ donc $a=1$ et $b=-1$.
   Ainsi, on obtient, par linéarité, que : $S=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}$.
   - Il s'agit alors bien d'une somme télescopique. On pose le changement d'indice : $j=k+1$ dans la première somme et le changement d'indice : $i=k+2$ dans la deuxième somme et on obtient : $S=\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j}-\sum_{i=3}^{n+2}\frac{1}{i}=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}=\boxed{\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}}$ en utilisation le fait que l'indice de sommation est muet et la relation de Chasles.

2. • On cherche à déterminer trois réels a, b et c tels que $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{k-1}{k(k+1)(k+3)} = \dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+1}+\dfrac{c}{k+3}$. On met sur le même dénominateur puis on identifie car la relation doit être vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$. On obtient : $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{k-1}{k(k+1)(k+3)} = \dfrac{k^2(a+b+c)+k(4a+3b+c)+3a}{k(k+1)(k+3)}$. Ainsi, par identification, on doit résoudre le système suivant : $\begin{cases} a+b+c & = & 0 \\ 4a+3b+c & = & 1 \\ 3a & = & -1 \end{cases}$. La résolution du système donne : $\boxed{a=-\dfrac{1}{3},\ b=1 \text{ et } c=-\dfrac{2}{3}.}$

• En déduire la valeur de $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k(k+1)(k+3)}$. On obtient donc par linéarité : $S = -\dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3}$. On pose les changements de variable suivant : $j=k+1$ et $i=k+3$ et on obtient : $S = -\dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j}-\frac{2}{3}\sum_{i=4}^{n+3}\frac{1}{i} = -\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}-\frac{2}{3}\sum_{k=4}^{n+3}\frac{1}{k}$ car l'indice de sommation est muet. D'après la relation de Chasles, on obtient : $S = -\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}\right) = \boxed{\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{2}{n+2}-\dfrac{2}{n+3}\right).}$

3. **Calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$:**

⋆ Méthode 1 : calcul direct.

- On commence par montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$: $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+1}+\dfrac{c}{k+2}$. En mettant au même dénominateur, on obtient que : $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{(a+b+c)k^2+(3a+2b+c)k+2a}{k(k+1)(k+2)}$. Cette relation doit être vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ donc, par identification, on obtient que : $\begin{cases} a+b+c & = & 0 \\ 3a+2b+c & = & 0 \\ 2a & = & 1 \end{cases}$ donc $a=c=\dfrac{1}{2}$ et $b=-1$. Ainsi, on obtient, par linéarité, que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}$.
- Il s'agit alors bien d'une somme télescopique. On pose le changement d'indice : $j=k+1$ dans la deuxième somme et le changement d'indice : $i=k+2$ dans la troisième somme

et on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j}+\frac{1}{2}\sum_{i=3}^{n+2}\frac{1}{i}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=\boxed{\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}\end{aligned}$$

en utilisation le fait que l'indice de sommation est muet, la relation de Chasles et en mettant tout au même dénominateur.

⋆ Méthode 2 : par récurrence.

- On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

- Initialisation : pour $n=1$:
  - ⋆ D'un côté, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{1(1+1)(1+2)}=\frac{1}{6}$.
  - ⋆ De l'autre côté, on a : $\displaystyle\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}=\frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)}=\frac{4}{4\times 6}=\frac{1}{6}$.

  Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. On suppose la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ d'après la relation de Chasles. Puis par hypothèse de récurrence, on obtient que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$ en mettant au même dénominateur. Pour le numérateur on remarque que -1 est racine évidente et ainsi en factorisant par $n+1$ on obtient par identification des coefficients que : $n^3+6n^2+9n+4=(n+1)(n^2+5n+4)$. Puis le calcul du discriminant donne que $n^3+6n^2+9n+4=(n+1)(n^2+5n+4)=(n+1)(n+1)(n+4)$. Ainsi on obtient que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

Correction 6. La dérivation d'une somme finie est une méthode très classique qui permet d'obtenir plein de nouvelles sommes. Il s'agit juste d'utiliser le fait que $(f+g)' = f' + g'$ et ainsi la dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées.

1. D'après le binôme de Newton, on sait que : $\boxed{f(x) = (1+x)^n.}$
2. La fonction f est ainsi dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables. La fonction f est définie par deux expressions différentes que l'on peut dériver :
   - D'un côté, la fonction f vaut : $f(x) = (1+x)^n$. Ainsi, en dérivant, on obtient que :
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = n(1+x)^{n-1}.}$$
   - De l'autre côté, la fonction f vaut $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \cdots + nx^{n-1} + x^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k$. La dérivée d'une somme étant égale à la somme des dérivées, on obtient que :
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0 + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}}$$
   car le premier terme pour $k=0$ est constant donc sa dérivée est nulle.

   On obtient donc que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}.}$
3. Il s'agit de remarquer que $S = g(1) = f'(1)$ et ainsi, on obtient que : $\boxed{S = n2^{n-1}.}$ On retrouve bien le même résultat.

Correction 7. Il s'agit ici du même type de méthode que pour l'exercice précédent sauf que cette fois ci, on l'applique à la somme des termes d'une suite géométrique et plus au binôme de Newton.

1. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique et ainsi, on obtient, comme $x \neq 1$:
   $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ f(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}.}$
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ comme produit, somme et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions dérivables.
   - D'un côté, la fonction f vaut : $f(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Ainsi, en dérivant, on obtient que :
   $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ f'(x) = \dfrac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}.}$
   - De l'autre côté, la fonction f vaut $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} x^k$. La dérivée d'une somme étant égale à la somme des dérivées, on obtient que :
   $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.}$

⚠ La somme commence bien à $k=1$ car le terme pour $k=0$ dans $f(x)$ est le terme constant 1 qui est nul lorsqu'on dérive.

On obtient donc que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}.}$

On a : $\sum_{k=1}^{n} kx^k = \sum_{k=1}^{n} kx \times x^{k-1} = x\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$. D'après la question précédente, on obtient donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ \sum_{k=1}^{n} kx^k = x \times \frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}.}$$

3. Il faut ici remarquer que la somme correctionrespond à dériver deux fois la somme $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1+x+\sum_{k=2}^{n} x^k$. La fonction f est bien deux fois dérivables comme fonction polynomiale. Et en dérivant deux fois, on obtient bien : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ f''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2}$. Cette somme commence bien à $k=2$ car quand on dérive deux fois les termes 1 et x, ils deviennent nuls. En dérivant deux fois l'autre expression de f, on obtient la valeur de la somme :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2-n(n+1)x^{n-1}+2(n^2-1)x^n-n(n-1)x^{n+1}}{(1-x)^3}.}$$

Correction 8.

1. - **Calcul de $\mathbf{S_n + T_n}$:**
   Si on ne voit pas comment débuter, on commence par écrire la somme S_n+T_n sous forme développée. On obtient alors que : $S_n + T_n = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}$ car on se rend compte en écrivant les sommes sous forme développées que l'on obtient au final la somme de tous les coefficients binomiaux : S_n correctionrespond en effet à la somme des coefficients binomiaux $\binom{2n}{k}$ avec k pair et T_n correctionrespond à la somme des coefficients binomiaux $\binom{2n}{k}$ avec k impair donc en sommant les deux on a bien la somme de tous les coefficients binomiaux pour k allant de 0 à $2n$. Ainsi, d'après le binôme de Newton, on obtient que : $\boxed{S_n + T_n = 2^{2n} = 4^n.}$
   - **Calcul de $\mathbf{S_n - T_n}$:**
   De même, on peut commencer par écrire la somme $S_n - T_n$ sous forme développée. On obtient alors que : $S_n - T_n = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k$ car on se rend compte en écrivant les sommes sous forme développées que l'on obtient au final la somme de tous les coefficients binomiaux coefficientés par 1 ou par -1 : les coefficients binomiaux $\binom{2n}{k}$ avec k pair sont coefficienté par 1 et les coefficients binomiaux $\binom{2n}{k}$ avec k impair sont coefficienté par -1. Ainsi cela revient bien à sommer tous les nombres $\binom{2n}{k}(-1)^k$ pour k allant de 0 à $2n$. Ainsi, d'après le binôme de Newton, on obtient que : $\boxed{S_n + T_n = (1-1)^n = 0.}$

2. Il s'agit alors juste de résoudre le système $\begin{cases} S_n + T_n &= 2^{2n} \\ S_n - T_n &= 0. \end{cases}$. On obtient alors : $2S_n = 2^{2n}$ donc $S_n = 2^{2n-1}$ et $T_n = S_n = 2^{2n-1}$.

III Calculs de produits

Correction 9.

1. **Calcul de** $\prod_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{k} = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n = \boxed{n!}$

   Calcul de $\prod_{\mathbf{k=i}}^{\mathbf{i+n}} \mathbf{k}$ **:**

$$\begin{aligned}
\prod_{k=i}^{i+n} k &= i \times (i+1) \times (i+2) \times \cdots \times (i+n) \\
&= \frac{[1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (i-1)] \times [i \times (i+1) \times (i+2) \times \cdots \times (i+n)]}{[1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (i-1)]} \\
&= \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (i-1) \times i \times (i+1) \times (i+2) \times \cdots \times (i+n)}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (i-1)} = \boxed{\frac{(i+n)!}{(i-1)!}}.
\end{aligned}$$

2. **Calcul de** $\prod_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \exp\left(\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}\right)$ **:**

$$\prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{k}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}} \times e^{\frac{2}{n}} \times e^{\frac{3}{n}} \times \dots e^{\frac{n-1}{n}} \times e^{\frac{n}{n}} = e^{\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)+n}{n}} = e^{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}} = e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k} = \boxed{e^{\frac{n+1}{2}}.}$$

3. **Calcul de** $\prod_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{2k}}{\mathbf{2k+1}}$:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} &= \frac{2n \times (2n-2) \times \ldots \times 4 \times 2}{(2n+1) \times (2n-1) \times \ldots \times 3 \times 1} = \frac{(2n \times (2n-2) \times \ldots \times 4 \times 2)^2}{(2n+1) \times 2n \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1} \\
&= \frac{(2^n n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1))^2}{(2n+1)!} = \boxed{\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}}
\end{aligned}$$

4. **Calcul de** $\prod_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} (\mathbf{4k-2})$:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} (4k-2) &= \prod_{k=1}^{n} 2(2k-1) = 2^n \times (2n-1) \times (2n-3) \times \ldots \times 3 \times 1 \\
&= \frac{2^n \times 2n \times (2n-1) \times (2n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1}{2n \times (2n-2) \times \ldots \times 4 \times 2} = \frac{2^n \times (2n)!}{2^n \times n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1} = \boxed{\frac{(2n)!}{n!}}
\end{aligned}$$

5. **Calcul de $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$:**

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)=\frac{\prod_{k=2}^{n}(k^2-1)}{\prod_{k=2}^{n}k^2}=\frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)}{\prod_{k=2}^{n}k}\times\frac{\prod_{k=2}^{n}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n}k}=\frac{\prod_{k=1}^{n-1}k}{\prod_{k=2}^{n}k}\times\frac{\prod_{k=3}^{n+1}k}{\prod_{k=2}^{n}k}=$$

$\boxed{\frac{n+1}{2n}.}$

6. **Calcul de $\prod_{k=0}^{p-1}\frac{n-k}{p-k}$:**

$$\prod_{k=0}^{p-1}\frac{n-k}{p-k}=\frac{\prod_{k=0}^{p-1}(n-k)}{\prod_{k=0}^{p-1}(p-k)}=\frac{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)}{p(p-1)(p-2)\times\cdots\times 2\times 1}=\frac{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)}{p!}.$$

On essaye alors d'écrire le numérateur avec des factorielles. On obtient : $n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)=\frac{[n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)]\times[(n-p)\times\cdots\times 2\times 1]}{(n-p)\times\cdots\times 2\times 1}=\frac{n!}{(n-p)!}$. Ainsi on obtient au final que : $\prod_{k=0}^{p-1}\frac{n-k}{p-k}=\boxed{\frac{n!}{p!(n-p)!}=\binom{n}{p}.}$

Correction 10. On cherche à calculer $S=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{2}\right)$. D'après les propriétés du logarithme népérien, on a :

$$S=\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{2}\right)=\ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{n}k}{\prod_{k=1}^{n}2}\right)=\ln\left(\frac{n!}{2^n}\right).$$

Ainsi on obtient que : $\boxed{S=\ln\left(\frac{n!}{2^n}\right).}$

IV Calculs de sommes doubles

Correction 11.

1. **Calcul de $\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m} p(q^2+1)$:**

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m} p(q^2+1) &= \sum_{p=0}^{n}\left[p\sum_{q=0}^{m} q^2 + p\sum_{q=0}^{m} 1\right] \\
&= \sum_{p=0}^{n}\left[p\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + p(m+1)\right] = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}\sum_{p=0}^{n} p + (m+1)\sum_{p=0}^{n} p \\
&= \boxed{\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}\frac{n(n+1)}{2} + (m+1)\frac{n(n+1)}{2}.}
\end{aligned}$$

2. **Calcul de $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1$ et de $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1$:**

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} 1\right] = \sum_{i=1}^{n}[n] = n\sum_{i=1}^{n} 1 = \boxed{n^2.}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{i} 1\right] = \sum_{i=1}^{n}[i] = \sum_{i=1}^{n} i = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}.}$$

3. **Calcul de $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i2^j$:**

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i2^j = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} i2^j\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[i\sum_{j=1}^{n} 2^j\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[i\times 2\frac{1-2^n}{1-2}\right] = 2(2^n-1)\sum_{i=1}^{n} i = \boxed{(2^n-1)n(n+1).}$$

4. **Calcul de $\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=k}^{n}\frac{k}{l+1}$:**

On commence par essayer de calculer la somme la plus intérieure. On n'y arrive pas car on ne connaît pas la somme des inverses. Ainsi on va donc commencer par inverser le sens des symboles sommes. On a :

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=k}^{n}\frac{k}{l+1} = \sum_{0\leq k\leq l\leq n}\frac{k}{l+1} = \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{l}\frac{k}{l+1}$$

On peut également détailler les calculs : $\begin{cases} 0 \leq k \leq n \\ k \leq l \leq n \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq l \leq n \\ 0 \leq k \leq l. \end{cases}$ Ainsi on obtient que :

$$\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{l}\frac{k}{l+1} = \sum_{l=0}^{n}\left[\frac{1}{l+1}\sum_{k=0}^{l} k\right] = \sum_{l=0}^{n}\left[\frac{1}{l+1}\times\frac{l(l+1)}{2}\right] = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n} l = \boxed{\frac{n(n+1)}{4}.}$$

5. **Calcul de $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x^j$:**

- Si $x=1$, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}x^j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}1=\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$.
- Si $x\neq 1$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}x^j=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{i}x^j\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[x\frac{1-x^i}{1-x}\right]=\frac{x}{1-x}\sum_{i=1}^{n}(1-x^i)=\frac{x}{1-x}\left[\sum_{i=1}^{n}1-\sum_{i=1}^{n}x^i\right]$.

  Ainsi on obtient que : $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}x^j=\frac{x}{1-x}\left[n-x\frac{1-x^n}{1-x}\right].}$

6. **Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2}\sum_{i=k}^{k+2}ki^2$:**

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n^2}\sum_{i=k}^{k+2}ki^2 &= \sum_{k=0}^{n^2}\left[k\sum_{i=k}^{k+2}i^2\right]=\sum_{k=0}^{n^2}\left[k\left(k^2+(k+1)^2+(k+2)^2\right)\right]=\sum_{k=0}^{n^2}k(3k^2+6k+5)\\ &= 3\sum_{k=0}^{n^2}k^3+6\sum_{k=0}^{n^2}k^2+5\sum_{k=0}^{n^2}k=\boxed{3\left(\frac{n^2(n^2+1)}{2}\right)^2+n^2(n^2+1)(2n^2+1)+5\frac{n^2(n^2+1)}{2}.}\end{aligned}$$

7. **Calcul de $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j}\frac{x^i}{x^j}$:**

- Si $x=1$, on a : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j}\frac{x^i}{x^j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j}1=\sum_{j=1}^{n}j=\frac{n(n+1)}{2}$.
- Si $x\neq 1$: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j}\frac{x^i}{x^j}=\sum_{j=1}^{n}\left[x^{-j}\sum_{i=0}^{j}x^i\right]=\sum_{j=1}^{n}\left[x^{-j}\frac{1-x^{j+1}}{1-x}\right]=\frac{1}{1-x}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{x}\right)^j-x\right]$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j}\frac{x^i}{x^j}=\frac{1}{1-x}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}{x-1}-xn\right].}$$

8. **Calcul de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i}$:**

On commence par essayer de calculer la somme la plus intérieure. On n'y arrive pas. Ainsi on va donc commencer par inverser le sens des symboles sommes. On a :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i}=\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\binom{j}{i}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i}$$

On peut également détailler les calculs : $\begin{cases}1\leq i\leq n\\ i\leq j\leq n\end{cases}\iff\begin{cases}1\leq j\leq n\\ 1\leq i\leq j.\end{cases}$ Ainsi on obtient que : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i}=\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i}\right]=\sum_{j=1}^{n}\left[2^j-1\right]=\boxed{2(2^n-1)-n.}$