Correction TD5 - Trigonométrie

. 1 Résolution d'équations trigonométriques

Correction 1.

- **Calcul de** $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ **:** on a $\frac{pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$, donc :
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),$$
soit après simplification : $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}}$.

- **Calcul de** $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ **:** de même, on a
$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),$$
soit après simplification : $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}}$.

- **Calcul de** $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ **:** à partir du calcul précédent, on a :
$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3}}{4}}$$

- **Calcul de** $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ **et** $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ **:** Il suffit de remarquer que : $\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{2}$. On pose alors $\theta = \frac{\pi}{8}$ et on obtient par la formule de duplication des angles : $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$. Ainsi,
$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1}{2} = \frac{\sqrt{2}+2}{4}.$$
Le réel $\frac{\pi}{8}$ est dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et le cosinus est positif sur cet intervalle, ainsi :
$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}.}$$
Une fois le cosinus connu, le sinus se déduit par la formule $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. On obtient ainsi,
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}+2}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$
Là encore, le sinus étant positif sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient :
$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}.}$$

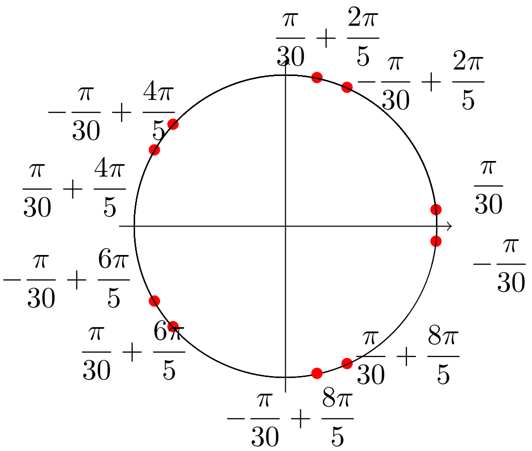
Correction 2. Il s'agit dans cet exercice d'égalités trigonométriques fondamentales que l'on résout donc en appliquant la méthode du cours.

1. **Résolution de** $\cos(\mathbf{5x}) = \dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$ **:** L'égalité est de type équation fondamentale.

$$\cos(5x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(5x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z},\ 5x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 5x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi. \end{cases}$$

On obtient donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$



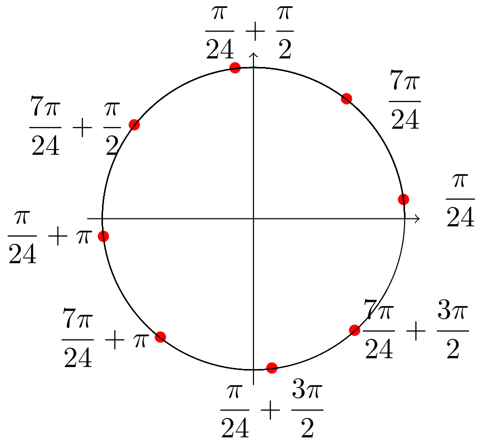
Pour savoir combien de points tracer sur le cercle pour chaque ensemble de solutions, on cherche la première valeur de k pour laquelle on retombe sur la solution de départ modulo 2π. Par exemple, pour le premier ensemble de solution, on cherche k tel que $\dfrac{2k\pi}{5} = 2\pi$, soit $k = 5$: on doit donc tracer 5 points sur le cercle trigonométrique. Même chose pour le deuxième ensemble de solutions.

2. **Résolution de** $\sin(\mathbf{4x}) = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ **:** L'égalité est de type équation fondamentale.

$$\sin(4x) = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(4x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z},\ 4x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 4x = \pi + \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi. \end{cases}$$

On obtient donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

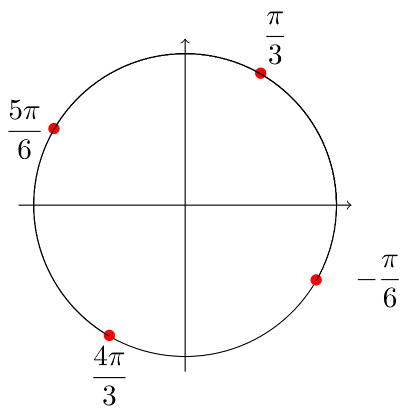


On remarque ici qu'il faut tracer 4 points pour chaque ensemble de solutions : en effet, on doit chercher k tel que $\frac{k\pi}{2}=2\pi$, soit $k=4$.

3. **Résolution de** $\tan\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}}\right)$ **:** L'égalité est de type équation fondamentale. On peut commencer par chercher le domaine de définition de cette équation. On a, d'après le domaine de définition de la tangente, que : $\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\neq\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. On résout ensuite l'équation fondamentale et on vérifiera bien que les solutions trouvées n'appartiennent pas à l'ensemble $\{\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.
$$\tan\left(\frac{x}{2}\right)=-1 \quad\Leftrightarrow\quad \tan\left(\frac{x}{2}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\ \frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}+k\pi.$$
On obtient donc
$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.}$$

4. **Résolution de** $\tan(\mathbf{2x})=-\sqrt{\mathbf{3}}$ **:** L'égalité est de type équation fondamentale. On peut commencer par chercher le domaine de définition de cette équation. On a, d'après le domaine de définition de la tangente, que : $2x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$. On résout ensuite l'équation fondamentale et on vérifiera bien que les solutions trouvées n'appartiennent pas à l'ensemble $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.
$$\tan(2x)=-\sqrt{3} \quad\Leftrightarrow\quad \tan(2x)=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\ 2x=-\frac{\pi}{3}+k\pi.$$

On obtient donc
$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}.}$$



Correction 3.

1. **Résolution de $\sin \mathbf{x} - \cos \mathbf{x} = \frac{\sqrt{6}}{2}$:** On reconnaît la forme $a\cos(x) + b\sin(x)$, on applique donc la méthode associée. On obtient alors

$$\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)\right) = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x - \frac{3\pi}{4} & = & \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x - \frac{3\pi}{4} & = & -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right.$$

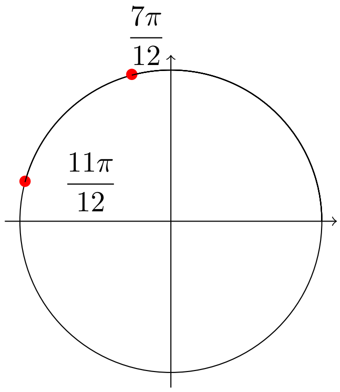
On obtient ainsi :

- Sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{11\pi}{12} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{12} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

- Sur $[0, 2\pi[$ comme sur $]-\pi, \pi]$:

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \left\{\frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right\}.}$$



2. **Résolution de $-\sqrt{3}\sin \mathbf{x} + \cos \mathbf{x} = \sqrt{2}$:** Même méthode que dans l'exemple précédent. On obtient ainsi

- Sur $\mathbb{R}$:

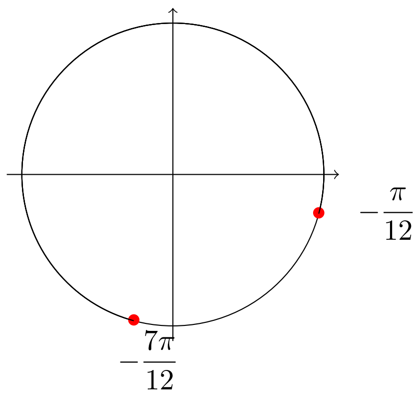
$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{7\pi}{12} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{12} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

- Sur $[0, 2\pi[$:

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{17\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \right\}.}$$

- Sur $[-\pi, \pi[$:

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12} \right\}.}$$

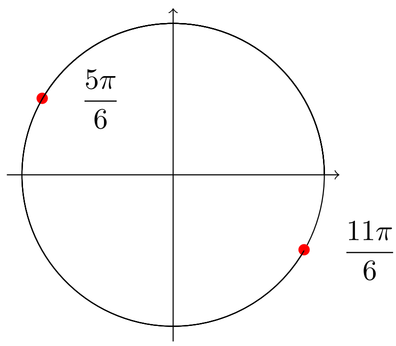


3. **Résolution de $\sin \mathbf{x} + \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}} \cos \mathbf{x} = \mathbf{0}$:** Même méthode que dans l'exemple précédent. On a :

$$\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

On obtient ainsi :

- Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.}$
- Sur $[0, 2\pi[$: $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}.}$
- Sur $[-\pi, \pi[$: $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}.}$



4. **Résolution de** $\cos(\mathbf{2x}) + \sqrt{\mathbf{3}}\sin(\mathbf{2x}) = \sqrt{\mathbf{2}}$ **:** Quitte à poser $X = 2x$, l'égalité est de type $a\cos(X) + b\sin(X) = c$, on applique donc la méthode du cours. On se ramène ainsi à l'équation fondamentale suivante : $\cos(X - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi,

$$\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z},\ 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi. \end{cases}$$

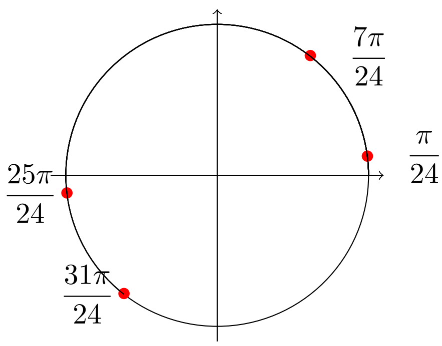
On obtient ainsi :

- Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{7\pi}{24} + k\pi\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R};\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{24} + k\pi\right\}.}$
- Sur $[0, 2\pi[$:

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{24}, \frac{7\pi}{24}, \frac{25\pi}{24}, \frac{31\pi}{24}\right\}.}$$

- Sur $]-\pi, \pi]$:

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{23\pi}{24}, -\frac{17\pi}{24}, \frac{\pi}{24}, \frac{7\pi}{24}\right\}.}$$



Correction 4.

1. **Résolution de $\tan^2 x + (1-\sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0$:** Le domaine de définition est ici celui de la tangente, donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. On pose alors $X = \tan x$. On obtient

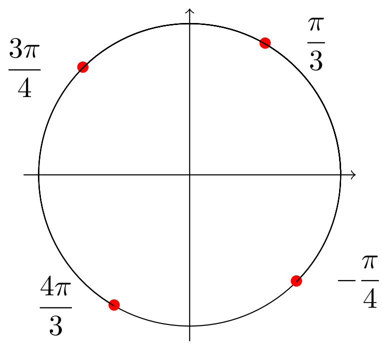
$$\tan^2 x + (1-\sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = X \\ X^2 + (1-\sqrt{3})X - \sqrt{3} = 0. \end{cases}$$

On calcule le discriminant, en utilisant l'astuce qui consiste à ne pas rassembler les termes sans racine pour reconnaître une identité remarquable : $\Delta = 1 + 3 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2$. On obtient donc -1 et $\sqrt{3}$ comme racines. Ainsi on se ramène aux deux équations fondamentales suivantes :

$$\tan^2 x + (1-\sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \text{ou} \\ \tan x = \sqrt{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z},\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi. \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}}.$$



2. **Résolution de $\sqrt{2}\sin^2 x + (\sqrt{2}-1)\cos x + 1 - \sqrt{2} = 0$:** On commence par transformer le sinus au carré par un cosinus au carré et on refait ensuite un raisonnement analogue. L'équation à résoudre devient alors

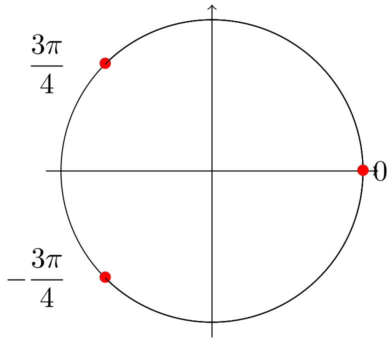
$$\begin{aligned} \sqrt{2}\sin^2 x + (\sqrt{2}-1)\cos x + 1 - \sqrt{2} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\cos^2 x + (1-\sqrt{2})\cos x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos x = X \\ \sqrt{2}X^2 + (1-\sqrt{2})X - 1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

La résolution de l'équation du second degré donne $\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ et 1 comme racines. Là encore, il faut remarquer que : $\Delta = 1+2+2\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^2$. Ainsi on se ramène aux deux équations fondamentales suivantes

$$\sqrt{2}\sin^2 x + (\sqrt{2}-1)\cos x + 1 - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{ou} \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) \\ \text{ou} \\ \cos x = \cos(0) \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}}.$$



3. **Résolution de $\mathbf{2\sin^4 x - \sin^3 x - 2\sin^2 x + \sin x = 0}$:** On fait là encore un changement de variable. L'équation à résoudre devient alors

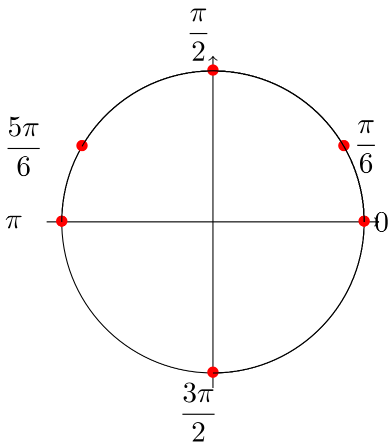
$$2\sin^4 x - \sin^3 x - 2\sin^2 x + \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin x = X \\ 2X^4 - X^3 - 2X^2 + X = 0. \end{cases}$$

On obtient ainsi une équation de degré 4, il faut donc commencer par rechercher les racines évidentes. On a tout de suite que 0 est racine évidente et on obtient alors que : $2X^4 - X^3 - 2X^2 + X = X(2X^3 - X^2 - 2X + 1)$. On remarque aussi que 1 est racine évidente ainsi que -1. On obtient donc que : $X(2X^3 - X^2 - 2X + 1) = X(X-1)(X+1)(aX+b)$. Puis par identification des coefficients d'un polynôme, on obtient que : $2X^4 - X^3 - 2X^2 + X = X(X-1)(X+1)(2X-1)$. Ainsi les racines sont -1, 0, $\frac{1}{2}$ et 1. On se ramène donc aux équations fondamentales suivantes :

$$2\sin^4 x - \sin^3 x - 2\sin^2 x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \text{ ou } \sin x = 0 \text{ ou } \sin x = \frac{1}{2} \text{ ou } \sin x = 1.$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}}.$$



Correction 5.

1. **Résolution de $\cos(\mathbf{3x-2}) = \cos(\mathbf{2x-1})$:**

On sait que $\cos(X) = \cos(Y) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, \quad X & = \quad Y + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad X & = \quad -Y + 2k\pi. \end{cases}$ On peut appliquer cela ici et on obtient :

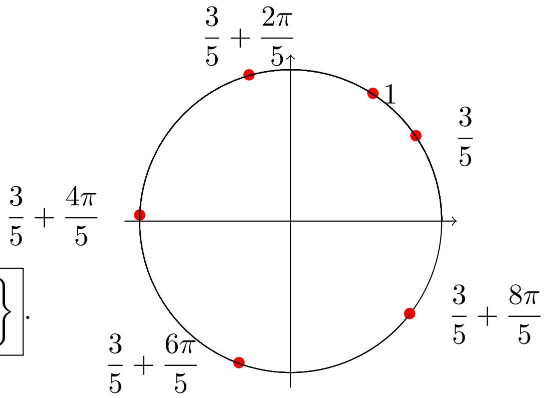
$$\cos(3x-2) = \cos(2x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 3x-2 & = \quad 2x-1+2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 3x-2 & = \quad -2x+1+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x & = \quad 1+2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x & = \quad \dfrac{3}{5} + \dfrac{2k\pi}{5}. \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{1+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{3}{5} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}\right\}}.$$

Et on a :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left\{1, \frac{3}{5}, \frac{3}{5} + \frac{2\pi}{5}, \frac{3}{5} + \frac{4\pi}{5}, \frac{3}{5} + \frac{6\pi}{5}, \frac{3}{5} + \frac{8\pi}{5}\right\}}.$$



2. **Résolution de $\sin\left(\mathbf{3x} - \frac{\pi}{\mathbf{3}}\right) = \sin\left(\mathbf{2x} + \frac{\pi}{\mathbf{6}}\right)$:**

De même, on sait que $\sin(X) = \sin(Y) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, \quad X & = \quad Y + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad X & = \quad \pi - Y + 2k\pi. \end{cases}$ On peut appliquer cela ici et on obtient :

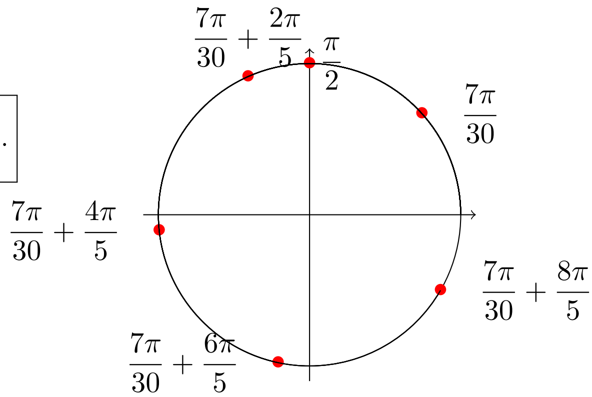
$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 3x - \dfrac{\pi}{3} & = \quad 2x + \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 3x - \dfrac{\pi}{3} & = \quad \pi - 2x - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x & = \quad \dfrac{\pi}{2} + 2 \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x & = \quad \dfrac{7\pi}{30} + \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}\right\}}.$$

Et on a :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{30}, \frac{19\pi}{30}, \frac{31\pi}{30}, \frac{43\pi}{30}, \frac{55\pi}{30}\right\}}.$$



3. **Résolution de** $\tan(\mathbf{x}+\mathbf{1})+\tan(\mathbf{3x}+\mathbf{1})=\mathbf{0}$ **:**
    - On commence par rechercher le domaine de définition de cette équation. On doit donc avoir pour tout $k\in\mathbb{Z}$: $x+1\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $3x+1\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$. On obtient donc que $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}-1+k\pi;\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}+\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.
    - De même que dans les deux exemples précédents, on sait que $\tan(X)=\tan(Y)\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\ X=Y+k\pi$. On peut appliquer cela ici et on obtient en utilisant tout d'abord l'imparité de la tangente :

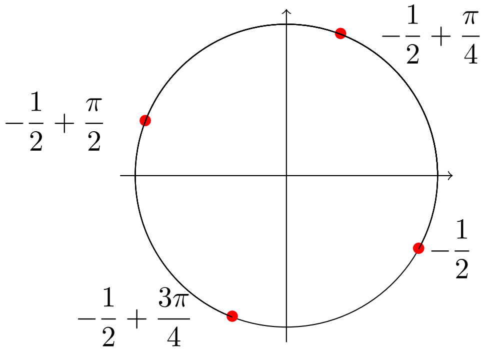
$$\begin{aligned}\tan(x+1)+\tan(3x+1)=0 &\Leftrightarrow \tan(x+1)=-\tan(3x+1)\Leftrightarrow\tan(x+1)=\tan(-3x-1)\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ x+1=-3x-1+k\pi\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\ x=-\frac{1}{2}+\frac{k\pi}{4}.\end{aligned}$$

Comme pour tout $k\in\mathbb{Z}$: $-\frac{1}{2}+\frac{k\pi}{4}\in\mathcal{D}$, on obtient :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{1}{2}+\frac{k\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}\right\}}.$$

Et on a :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[}=\left\{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4},-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2},-\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{4}\right\}}.$$



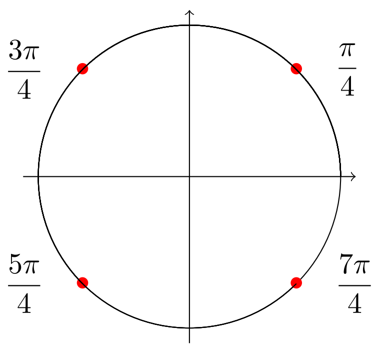
4. **Résolution de** $\sin^{\mathbf{2}}\mathbf{x}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ **:**

En posant $X=\sin(x)$, on doit résoudre $X^2=\frac{1}{2}$, à savoir : $X=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $X=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. On doit donc résoudre $\sin(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\sin(x)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. On obtient ainsi

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$$

Et on a :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[}=\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}}.$$



5. **Résolution de** $\sin(\mathbf{2x})=\cos\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}}\right)$ **:**

Une façon de faire ici est de transformer le cosinus en sinus. On obtient ainsi

$$\sin(2x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 2x &= \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{x}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} & \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 2x &= \pi - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

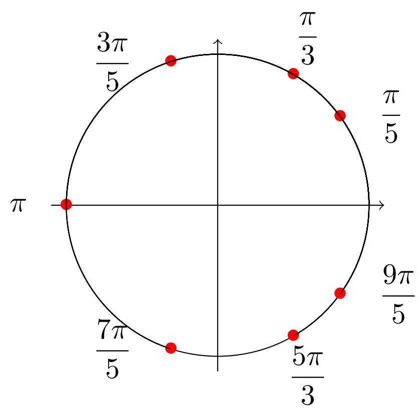
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x &= \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{4k\pi}{3} \\ \text{ou} & \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x &= \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{4k\pi}{5}. \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{3} + \frac{4k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{5} + \frac{4k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}\right\}}.$$

Et on a :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}, \pi, \frac{5\pi}{3}, \frac{9\pi}{5}\right\}}.$$

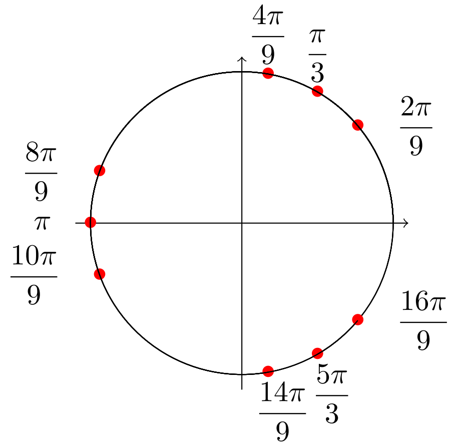


6. **Résolution de $\mathbf{2\cos^2(3x) + 3\cos(3x) + 1 = 0}$:**
On pose le changement de variable $X = \cos(3x)$ et on doit donc résoudre $2X^2 + 3X + 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 1$ et les deux solutions distinctes sont donc $X_1 = -1$ et $X_2 = -\dfrac{1}{2}$. Ainsi on doit donc résoudre $\cos(3x) = -1$ et $\cos(3x) = -\dfrac{1}{2}$. La résolution de ces deux équations fondamentales donne

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}}.$$

Et on a :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left\{\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \pi, \frac{10\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}, \frac{5\pi}{3}, \frac{16\pi}{9}\right\}}.$$



7. **Résolution de $\mathbf{2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin(2x)}$:**
En utilisant la formule de duplication du sinus, on obtient la factorisation suivante

$$\begin{aligned}
2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin(2x) &\Leftrightarrow \sin x\left(\sin x - \sqrt{3}\cos x\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ ou } \sin x - \sqrt{3}\cos x = 0\\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = k\pi \text{ ou } \sin x - \sqrt{3}\cos x = 0.
\end{aligned}$$

La deuxième équation est de type $a\cos x + b\sin x$. On obtient :

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) = 2\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right).$$

Ainsi,

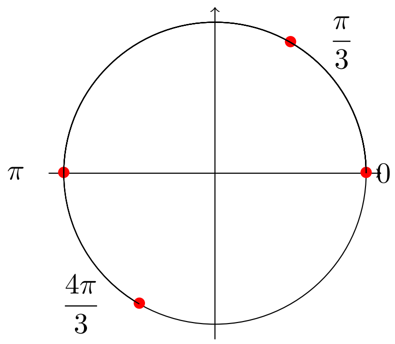
$$2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin(2x) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = k\pi \text{ ou } \cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, & x = k\pi\\ \text{ou} & \\ \exists k \in \mathbb{Z}, & x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi\\ \text{ou} & \\ \exists k \in \mathbb{Z}, & x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

On a donc :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}}.$$

Et de plus :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}\right\}}.$$



8. **Résolution de $\sin\left(\mathbf{2x} - \frac{\pi}{\mathbf{4}}\right) = -\cos\left(\mathbf{x} + \frac{\pi}{\mathbf{6}}\right)$:**
On transforme le cosinus en sinus afin de se ramener à une équation fondamentale. On a en utilisant l'imparité du sinus :

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Ainsi,

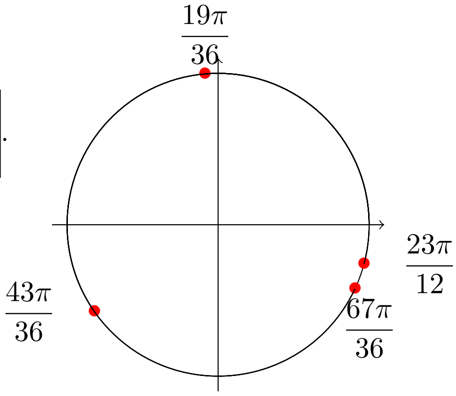
$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z},\ 2x - \dfrac{\pi}{4} = x - \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\\ \text{ou}\\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 2x - \dfrac{\pi}{4} = \pi - x + \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, & x = -\dfrac{\pi}{12} + 2k\\ \text{ou} & \\ \exists k \in \mathbb{Z}, & x = -\dfrac{5\pi}{36} + 2 \end{cases}$$

On obtient :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{19\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}}.$$

Et on a :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left\{\frac{19\pi}{36}, \frac{43\pi}{36}, \frac{67\pi}{36}, \frac{23\pi}{12}\right\}}.$$



9. **Résolution de $\sqrt{3}\cos^2 x + 2\cos x \sin x - \sqrt{3}\sin^2 x = \sqrt{2}$:**
On commence par utiliser le formulaire de trigonométrie afin de transformer l'expression :

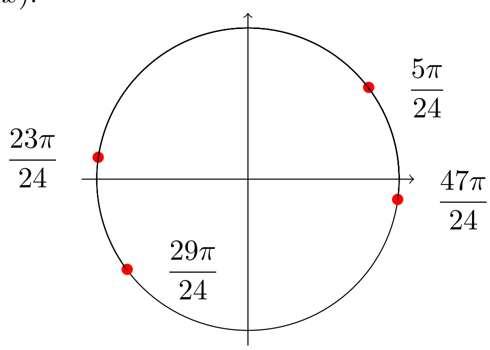
$$\sqrt{3}\cos^2 x + 2\cos x \sin x - \sqrt{3}\sin^2 x = \sqrt{3}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + \sin(2x) = \sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x).$$

On pose $X = 2x$, et on factorise $\sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x)$.
On obtient :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{5\pi}{24} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{24} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}}.$$

Et on a :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left\{\frac{5\pi}{24}, \frac{23\pi}{24}, \frac{29\pi}{24}, \frac{47\pi}{24}\right\}}.$$



10. **Résolution de $1 + \cos x + \sin(5x) + \sin(6x) = 0$:**
On commence par transformer l'expression grâce au formulaire de trigonométrie afin de la mettre sous forme factorisée. On obtient

$$1+\cos x+\sin(5x)+\sin(6x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\sin\left(\frac{11x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{11x}{2}\right)\right).$$

Ainsi résoudre $1 + \cos x + \sin(5x) + \sin(6x) = 0$ est équivalent à résoudre $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ ou $\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{11x}{2}\right) = 0$. On peut déjà résoudre la première équation et on obtient

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \pi + 2k\pi.$$

Étudions la deuxième équation :

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{11x}{2}\right) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\sin\left(\frac{11x}{2}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(-\frac{11x}{2}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{11x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \exists k \in \mathbb{Z}, & \frac{x}{2} & = \frac{\pi}{2} + \frac{11x}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} & & \\ \exists k \in \mathbb{Z}, & \frac{x}{2} & = -\frac{\pi}{2} - \frac{11x}{2} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \exists k \in \mathbb{Z}, & x & = -\frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{5} \\ \text{ou} & & \\ \exists k \in \mathbb{Z}, & x & = -\frac{\pi}{12} - \frac{k\pi}{3}. \end{array}\right.$$

Ainsi, on obtient

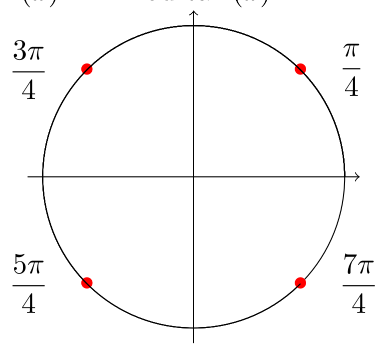
$$\boxed{\begin{array}{l}\mathcal{S}=\{\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{-\frac{\pi}{10}-\frac{2k\pi}{5},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{12}-\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\\ \text{et } \mathcal{S}_{[0,2\pi[}=\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{10},\frac{7\pi}{12},\frac{7\pi}{10},\frac{11\pi}{12},\pi,\frac{11\pi}{10},\frac{15\pi}{12},\frac{15\pi}{10},\frac{19\pi}{12},\frac{19\pi}{10},\frac{23\pi}{12}\right\}.\end{array}}$$

11. **Résolution de $\tan^4 x+2\tan^2 x-3=0$:**
On pose le changement de variable $X=\tan^2(x)$ et on doit donc résoudre : $X^2+2X-3=0$. Le calcul du discriminant donne que les solutions sont -3 et 1. Ainsi, on doit résoudre les deux équations $\tan^2(x)=-3$ et $\tan^2(x)=1$. Comme un carré est toujours positif, la première équation est impossible. La deuxième équation donne $\tan(x)=-1$ ou $\tan(x)=1$.

On obtient donc

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}}.$$

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[}=\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}}.$$



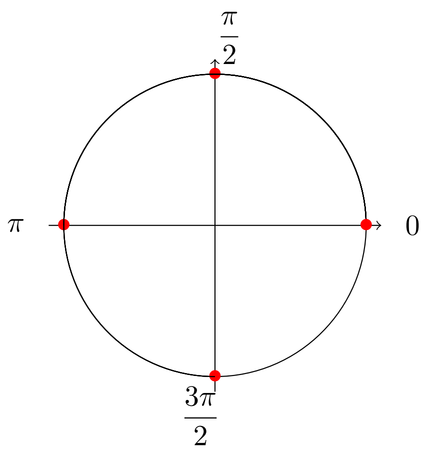
Correction 6.

1. **Résolution de $\sin^4 x+\cos^4 x=1$:**
Le domaine de définition est $\mathbb{R}$. L'idée ici est de transformer l'écriture afin de factoriser.

$$\begin{aligned}\sin^4 x+\cos^4 x=1 &\Leftrightarrow \sin^4 x-1+\cos^4 x=0\Leftrightarrow(\sin^2 x-1)(\sin^2 x+1)+\cos^4 x=0\\ &\Leftrightarrow -\cos^2 x(\sin^2 x+1)+\cos^4 x=0\Leftrightarrow\cos^2 x\left(-\sin^2 x-1+\cos^2 x\right)=0\\ &\Leftrightarrow -2\cos^2 x\sin^2 x=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl}\exists k\in\mathbb{Z}, & x & = \frac{\pi}{2}+k\pi\\ \text{ou} & & \\ \exists k\in\mathbb{Z}, & x & = k\pi.\end{array}\right.\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}=\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}}.$$

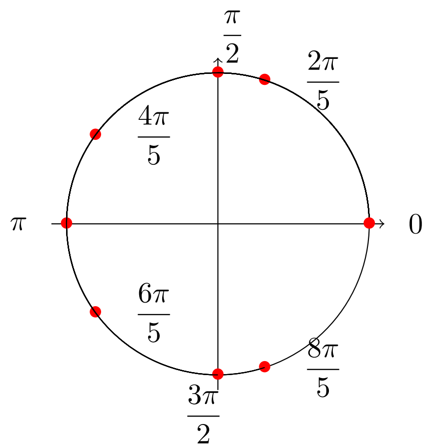


2. **Résolution de $\sin\theta + \sin(2\theta) + \sin(3\theta) + \sin(4\theta) = 0$:**
Pour factoriser cette équation, il faut utiliser plusieurs fois les formules transformant les sommes en produits.

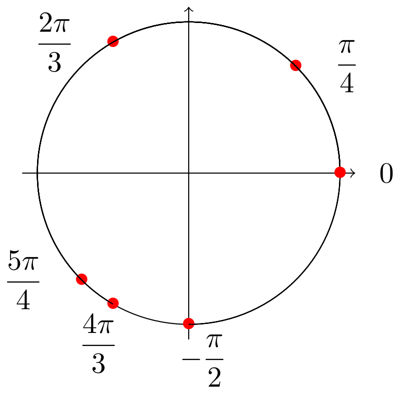
$$\begin{aligned}
\sin\theta + \sin(2\theta) + \sin(3\theta) + \sin(4\theta) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{7\theta}{2}\right)\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{7\theta}{2}\right)\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{5\theta}{2}\right)\cos\theta = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lll} \exists k\in\mathbb{Z}, & \theta & = \dfrac{2k\pi}{5}\\ \text{ou} & & \\ \exists k\in\mathbb{Z}, & \theta & = \pi + 2k\pi\\ \text{ou} & & \\ \exists k\in\mathbb{Z}, & \theta & = \dfrac{\pi}{2} + k\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{2k\pi}{5},\ k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \{\pi + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}}$$



3. **Résolution de** $\cos\theta - \cos(\mathbf{2}\theta) = \sin(\mathbf{3}\theta)$ **:**
En utilisant tout d'abord les formules transformant les sommes en produits, on obtient
$$\cos\theta - \cos(2\theta) = -2\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$
Afin de faire apparaître $\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)$ de l'autre côté, ce qui nous permet alors de factoriser, on utilise la formule de duplication des angles et on obtient
$$\sin(3\theta) = 2\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right).$$
On obtient ainsi
$$\cos\theta - \cos(2\theta) = \sin(3\theta) \quad\Leftrightarrow\quad \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) = 0 \\ \text{ou} \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) = 0 \\ \text{ou} \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\theta}{2}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \exists k\in\mathbb{Z},\quad \theta & = & \frac{2k\pi}{3} \\ \text{ou} & & \\ \exists k\in\mathbb{Z},\quad \theta & = & \pi - 3\theta + 4k\pi \\ \text{ou} & & \\ \exists k\in\mathbb{Z},\quad \theta & = & \pi + 3\theta + 4k\pi. \end{array}\right.$$
On obtient donc :
$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}}.$$



4. **Résolution de** $\cos^3\mathbf{x}\sin(\mathbf{3x}) + \sin^3\mathbf{x}\cos(\mathbf{3x}) = \mathbf{0}$ **:**
On suit les indications.
   - Expression de $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$.
$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(2x)\cos x + \sin x\cos(2x) = 2\sin x\cos^2 x + \sin x\left(1 - 2\sin^2 x\right) \\ &= 2\sin x\left(1 - \sin^2 x\right) + \sin x - 2\sin^3 x = -4\sin^3 x + 3\sin x.\end{aligned}$$

- Expression de $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$.

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x = \left(2\cos^2 x - 1\right)\cos x - 2\cos x\sin^2 x\\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x\left(1-\cos^2 x\right) = 4\cos^3 x - 3\cos x.\end{aligned}$$

- Résolution.

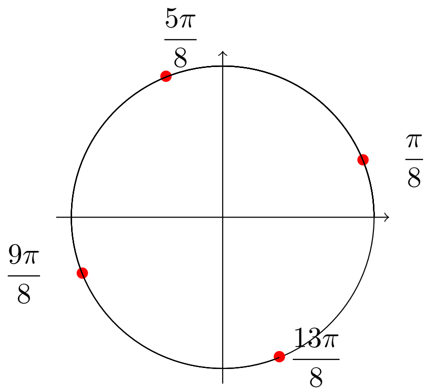
$$\begin{aligned}\cos^3 x\sin(3x) + \sin^3 x\cos(3x) = 0 &\Leftrightarrow \cos^3 x\left(-4\sin^3 x + 3\sin x\right) + \sin^3 x\left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) = \frac{3}{4}\\ &\Leftrightarrow 3(\sin x\cos^3 x - \sin^3 x\cos x) = \frac{3}{4}\\ &\Leftrightarrow \cos x\sin x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

En utilisant les formules de trigonométrie :

$$\begin{aligned}\cos^3 x\sin(3x) + \sin^3 x\cos(3x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin(2x)\cos(2x) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin(4x) = 1\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, 4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}}.$$



Correction 7.

1. Tout d'abord, $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est bien défini pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{\pi + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

   (a) On a $1+u^2>0$ donc $\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ est bien défini. De plus, on a

$$\frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{1 + \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos x}{1} = \cos x.$$

(b) De même, $1+u^2>0$ donc $\dfrac{2u}{1+u^2}$ est bien défini. De plus, on a

$$\frac{2u}{1+u^2}=\frac{2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{1+\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}=\frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{\sin x}{1}=\sin x.$$

(c) On a $1-u^2\neq 0$ si et seulement si $\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\neq 1$, c'est-à-dire $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\notin\{-1,1\}$. On doit donc avoir $x\in\mathbb{R}\backslash\left(\{\pi+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\right)$. On a alors :

$$\frac{2u}{1-u^2}=\frac{2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}=\frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x.$$

2. L'équation est définie pour $\dfrac{x}{2}\in\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. Le domaine de définition est donc

$$\boxed{\mathcal{D}=\mathbb{R}\backslash\{\pi+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\}}$$

.

On pose alors $u=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, et on utilise les formules de la question précédentes pour transformer l'équation. On est ramenés à résoudre

$$\frac{1-u^2}{1+u^2}-3\frac{2u}{1+u^2}+2u-1=0\Leftrightarrow\frac{1-u^2-6u+2u+2u^3-1-u^2}{1+u^2}=0\Leftrightarrow\frac{2u(u^2-u-2)}{1+u^2}=0.$$

On doit donc trouver les u tels que le numérateur s'annule. On obtient $u\in\{0,-1,2\}$. On doit ensuite revenir à la variable x, on résout donc

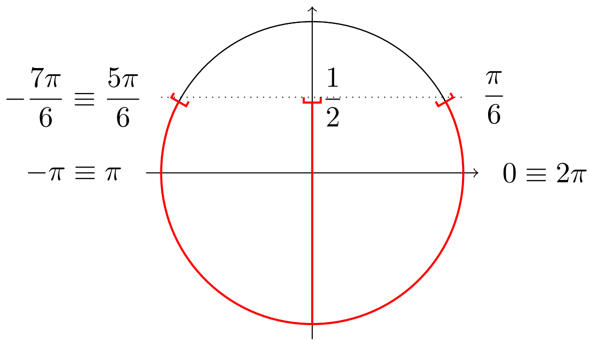
- $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)=0\Leftrightarrow\frac{x}{2}=k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=2k\pi,k\in\mathbb{Z}$
- $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)=-1\Leftrightarrow\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$
- $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)=2\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\arctan(2)+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\arctan(2)+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

$$\boxed{S=\{2k\pi,k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{2\arctan 2+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\}}$$

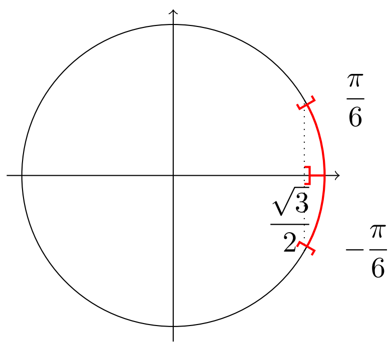
. 2 Résolution d'inéquations trigonométriques

Correction 8.

1. **Résolution de $\mathbf{2\sin(x) - 1 < 0}$:** On se ramène à une inéquation fondamentale :$2\sin x - 1 < 0 \Leftrightarrow \sin x < \frac{1}{2}$.
   On résout alors cette inéquation fondamentale graphiquement :
   $\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[}$.
   Et on a :
   $$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left[0, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right[}$$
   .
   Et finalement :
   $$\boxed{\mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \left]-\pi, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right]}.$$



2. **Résolution de $\mathbf{2\cos(2x) > \sqrt{3}}$:** On se ramène à une inéquation fondamentale :
   $$2\cos(2x) > \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos(2x) > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\star).$$
   On résout alors cette inéquation fondamentale graphiquement :
   $$\begin{aligned} (\star) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{\pi}{12} + k\pi. \end{aligned}$$



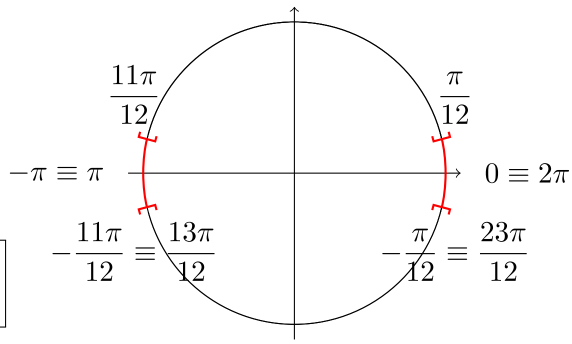
   On obtient donc : $\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi\right[}$.
   Bien penser à refaire un deuxième cercle pour tracer les solutions, et pouvoir en déduire les solutions sur les intervalles demandés.

On a :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left[0, \frac{\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{23\pi}{12}, 2\pi\right[}.$$

Et finalement :

$$\boxed{\mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \left]-\pi, -\frac{11\pi}{12}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{12}, \pi\right]}.$$



3. **Résolution de $\frac{1}{\sqrt{3}} \tan(3x) > 1$:** On se ramène à une inéquation fondamentale :

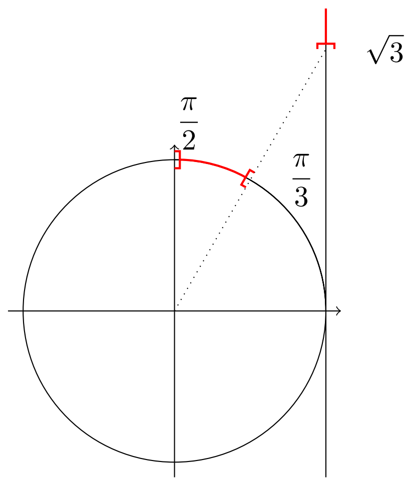
$$\frac{1}{\sqrt{3}} \tan(3x) > 1 \Leftrightarrow \tan(3x) > \sqrt{3} \quad (\star)$$

On résout alors cette inéquation fondamentale graphiquement :

$$\begin{aligned}(\star) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{3} + k\pi < 3x < \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3} < x < \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}.\end{aligned}$$

On obtient :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right[}.$$



On refait alors un autre cercle trigonométrique (à faire) afin de placer les angles solutions et on obtient, en prenant $k \in [\![0,5]\!]$:

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left]\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{4\pi}{9}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{9}, \frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{10\pi}{9}, \frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{13\pi}{9}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{16\pi}{9}, \frac{11\pi}{6}\right[}.$$

Enfin, on a :

$$\boxed{\mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \left]-\frac{8\pi}{9}, -\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]-\frac{5\pi}{9}, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{4\pi}{9}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{9}, \frac{5\pi}{6}\right[}$$

.

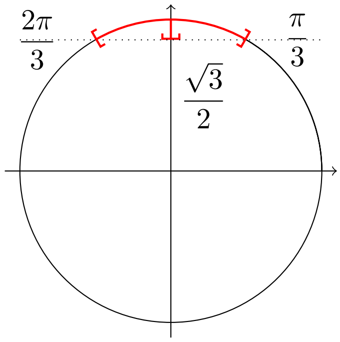
4. **Résolution de $\sin(3x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$:**

La résolution graphique sur le cercle trigonométrique donne :

$$\sin(3x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 3x \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$
$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \leq x \leq \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$$

On obtient donc :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right]}.$$



On fait un cercle trigonométrique pour placer les solutions, et on obtient, en prenant $k \in [\![0, 2]\!]$:

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left[0, \frac{4\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{9}, \frac{10\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{9}, \frac{16\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{17\pi}{9}, 2\pi\right[}.$$

Et finalement :

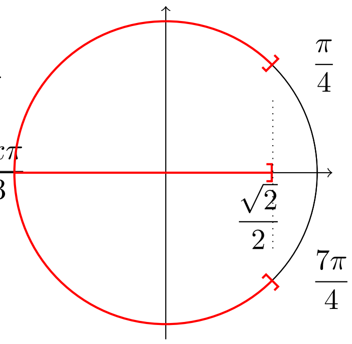
$$\boxed{\mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \left]-\pi, -\frac{8\pi}{9}\right] \cup \left[-\frac{7\pi}{9}, -\frac{2\pi}{9}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{9}, \pi\right]}.$$

5. **Résolution de $\sqrt{\mathbf{2}}\cos(\mathbf{3x}) \leq \mathbf{1}$:**

On a : $\sqrt{2}\cos(3x) \leq 1 \Leftrightarrow \cos(3x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

La résolution sur le cercle trigonométrique donne :

$$\begin{aligned} \cos(3x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq 3x \leq \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \leq 3x \leq \frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \end{aligned}$$



On obtient donc :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right]}.$$

Afin de donner les solutions dans $[0, 2\pi[$ et dans $]-\pi, \pi]$, on représente les solutions sur un cercle trigonométrique en prenant $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$. On obtient alors :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{9\pi}{12}, \frac{15\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{17\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right]}.$$

Et finalement :

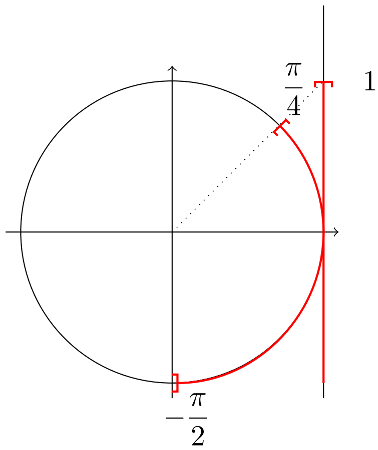
$$\boxed{\mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \left]-\pi, -\frac{9\pi}{12}\right] \cup \left[-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{9\pi}{12}, \pi\right]}.$$

6. **Résolution de $\tan(\mathbf{x}) \leq \mathbf{1}$:**

La résolution graphique sur le cercle trigonométrique donne :

$\tan(x) \leq 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\dfrac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

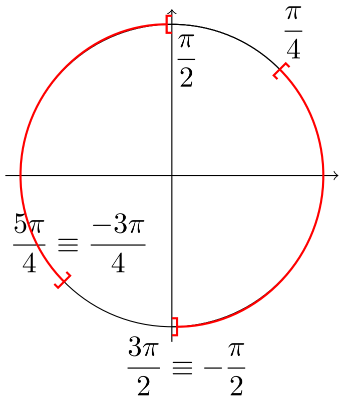
On obtient : $\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]}$.



Attention, les solutions pour la tangente sont définies modulo π, et non 2π. Il y a donc deux intervalles solutions à tracer sur le cercle trigonométrique.

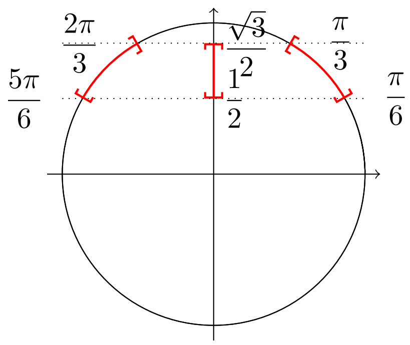
On a donc : $\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[}$.

Et finalement : $\boxed{\mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \left]-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]}$.



Correction 9.

1. **Résolution de $\mathbf{4\sin^2(x) - (2+2\sqrt{3})\sin(x) + \sqrt{3} \leq 0}$:**
   On pose $X = \sin(x)$ et on doit donc résoudre $4X^2 - (2+2\sqrt{3})X + \sqrt{3} \leq 0$. Le calcul du discriminant donne $\Delta = (2\sqrt{3}-2)^2$ et on obtient ainsi comme solutions $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2}$. Ainsi :
   $$4X^2 - (2+2\sqrt{3})X + \sqrt{3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq X \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
   Comme $X = \sin(x)$, on obtient au final que :
   $$4\sin^2(x) - (2+2\sqrt{3})\sin(x) + \sqrt{3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
   La résolution sur le cercle trigonométrique donne
   $$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]\right)}.$$

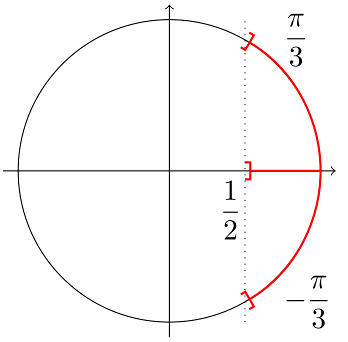


2. **Résolution de $\mathbf{\tan^2(x) - 1 < 0}$:**
   On a : $\tan^2 x - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < \tan(x) < 1$. La résolution graphique sur le cercle trigonométrique (à faire) donne
   $$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right[}.$$

3. **Résolution de $\mathbf{2\cos^2(3x) - 3\cos(3x) + 1 \leq 0}$:**
On pose $X = \cos(3x)$ et on doit donc résoudre $2X^2 - 3X + 1 \leq 0$. Le calcul du discriminant donne que les solutions sont $\frac{1}{2}$ et 1. Ainsi $2X^2 - 3X + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq X \leq 1$. Comme $X = \cos(3x)$, on obtient que :
$$2\cos^2(3x) - 3\cos(3x) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \cos(3x) \leq 1.$$

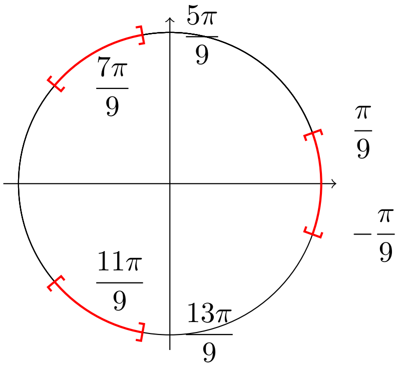
La résolution sur le cercle trigonométrique donne :

$$\frac{1}{2} \leq \cos(3x) \leq 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$



On obtient donc :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right[}.$$



4. **Résolution de $\mathbf{\tan^2(x) - (\sqrt{3} - 1)\tan(x) - \sqrt{3} < 0}$:**
On pose $X = \tan(x)$ et on doit donc résoudre $X^2 - (\sqrt{3} - 1)X - \sqrt{3} < 0$. Le discriminant vaut $\Delta = (1 + \sqrt{3})^2$ et ainsi les solutions sont -1 et $\sqrt{3}$. On obtient donc :
$$X^2 - (\sqrt{3} - 1)X - \sqrt{3} < 0 \Leftrightarrow -1 < X < \sqrt{3}.$$
Comme $X = \tan(x)$, on obtient que :
$$\tan^2(x) - (\sqrt{3} - 1)\tan(x) - \sqrt{3} < 0 \Leftrightarrow -1 < \tan(x) < \sqrt{3}.$$
La résolution par le cercle trigonométrique (à faire) donne
$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right[}.$$

5. **Résolution de $\mathbf{\frac{1}{4} \leq \sin^2(x) \leq \frac{1}{2}}$:**
On pose $X = \sin(x)$ et on doit résoudre $\frac{1}{4} \leq X^2 \leq \frac{1}{2}$ ce qui est équivalent à $X^2 - \frac{1}{2} \leq 0$ et $\frac{1}{4} - X^2 \leq 0$. Comme $X^2 - \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq X \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ et que $\frac{1}{4} - X^2 \leq 0 \Leftrightarrow X \geq \frac{1}{2}$ ou $X \leq -\frac{1}{2}$, on obtient que
$$\frac{1}{4} \leq X^2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow X \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \Leftrightarrow \sin(x) \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

La résolution sur le cercle trigonométrique (à faire) donne

$$\boxed{\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right] \cup \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k}$$

6. **Résolution de $\cos(\mathbf{x}) - \sin(\mathbf{x}) \geq \frac{\sqrt{6}}{2}$:**
On reconnaît la forme $a\cos(x) + b\sin(x)$ et on obtient donc

$$\cos(x) - \sin(x) \geq \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)\right) \geq \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On a ainsi obtenu une inégalité fondamentale de type $\cos(X) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ (avec ici $X = x + \frac{\pi}{4}$) et on résout donc cela graphiquement sur le cercle trigonométrique (à faire). On obtient alors

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{6}+2k\pi \leq x+\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{6}+2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{5\pi}{12}+2k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{12}+2k\pi.$$

On obtient donc les solutions suivantes :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{5\pi}{12} + 2k\pi, -\frac{\pi}{12} + 2k\pi\right]}.$$

7. **Résolution de $\sin(\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\cos(\mathbf{x}) \leq -\mathbf{1}$:**
On reconnaît la forme $a\cos(x) + b\sin(x)$ et on obtient donc

$$\sin(x) - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos(x) \leq -1 \Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right) \leq -1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On a changé le sens de l'inégalité car $-\frac{2}{\sqrt{3}} < 0$. On a ainsi obtenu une inégalité fondamentale de type $\cos(X) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ (avec ici $X = x + \frac{\pi}{3}$) et on résout donc cela graphiquement sur le cercle trigonométrique (à faire). On obtient alors

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{6}+2k\pi \leq x+\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6}+2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{6}+2k\pi.$$

On obtient donc les solutions suivantes :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]}.$$

8. **Résolution de $\cos(\mathbf{x}) + \sin(\mathbf{x}) - \mathbf{1} < \mathbf{0}$:**
On reconnaît la forme $a\cos(x) + b\sin(x)$ et on obtient donc

$$\cos x + \sin x - 1 < 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La résolution sur le cercle trigonométrique (à faire) donne :

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)<\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ \frac{\pi}{4}+2k\pi<x-\frac{\pi}{4}<\frac{7\pi}{4}+2k\pi \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ \frac{\pi}{2}+2k\pi<x<2\pi+2k\pi.$$

On obtient donc :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]\frac{\pi}{2}+2k\pi,2\pi+2k\pi\right[}.$$

9. **Résolution de $\sqrt{3}\cos(\mathbf{x})+\sin(\mathbf{x})-\sqrt{2}<0$:** Même méthode.

$$\sqrt{3}\cos x+\sin x-\sqrt{2}<0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x+\sin x<\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

On obtient par résolution graphique sur le cercle trigonométrique (à faire) :

$$\sqrt{3}\cos x+\sin x-\sqrt{2}<0 \ \Leftrightarrow\ \exists k\in\mathbb{Z},\ \frac{\pi}{4}+2k\pi<x-\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{4}+2k\pi.$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\frac{23\pi}{12}+2k\pi\right[}.$$

Correction 10.

1. **Résolution de $\cos(\mathbf{2x})-\cos(\mathbf{4x})<\mathbf{0}$:**

Une solution rapide consiste à utiliser la formule $\cos p-\cos q=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et à étudier le signe de chaque terme obtenu. Je détaille ici une deuxième solution :

$$\cos(2x)-\cos(4x)<0 \ \Leftrightarrow\ \cos(2x)-(2\cos^2(2x)-1)<0 \ \Leftrightarrow\ -2\cos^2(2x)+\cos(2x)+1<0.$$

On pose $X=\cos(2x)$, et on doit résoudre $-2X^2+X+1<0$. Les racines du trinôme sont 1 et $-\frac{1}{2}$, et ce trinôme est négatif à l'extérieur des racines. On a donc

$$(1)\Leftrightarrow X\in]-\infty,-\frac{1}{2}[\cup]1,+\infty[.$$

On revient ensuite à x :

$$(1)\ \Leftrightarrow\ \cos(2x)\in]-\infty,-\frac{1}{2}[\cup]1,+\infty[\Leftrightarrow\ \cos(2x)<-\frac{1}{2} \text{ ou } \cos(2x)>1.$$

Or la deuxième inéquation est toujours fausse, donc on résout uniquement la première grâce à un cercle trigonométrique (à faire), et on obtient :

$$(1)\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\frac{2\pi}{3}+2k\pi<2x<\frac{4\pi}{3}+2k\pi\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\frac{\pi}{3}+k\pi<x<\frac{2\pi}{3}+k\pi.$$

On obtient ainsi $\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi\right[}$. On en déduit :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[}=\left]\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right[\text{ et } \mathcal{S}_{]-\pi,\pi]}=\left]-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right[}.$$

2. **Résolution de $\mathbf{2\sin(x)\tan(x) - 3 < 0}$:**
Le domaine de définition est ici celui de la tangente, soit $\mathcal{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Ici, l'idée est d'utiliser la définition de la tangente : $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Attention : pour pouvoir multiplier ou diviser des inégalités par un même nombre, il faut connaître son signe et ici on ne connaît pas le signe du cosinus. Plutôt que de diviser ou multiplier par un nombre dont on ne connaît pas le signe, on MET SOUS LE MÊME DÉNOMINATEUR. Ainsi, on obtient ici :

$$\begin{aligned} & 2\sin x \tan x - 3 < 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{2\sin^2(x) - 3\cos(x)}{\cos(x)} < 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{2(1-\cos^2(x)) - 3\cos(x)}{\cos(x)} < 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{2\cos^2(x) + 3\cos(x) - 2}{\cos(x)} > 0 \end{aligned}$$

On pose $X = \cos(x)$, et on obtient : (2) $\Leftrightarrow \dfrac{2X^2 + 3X - 2}{X} > 0$.
On doit donc étudier le signe de $2X^2 + 3X - 2$ dont les solutions sont -2 et $\dfrac{1}{2}$. On obtient :

X	$-\infty$		-2		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2X^2 + 3X - 2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
X		$-$		$-$	$\|$	$+$		$+$	
Q		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

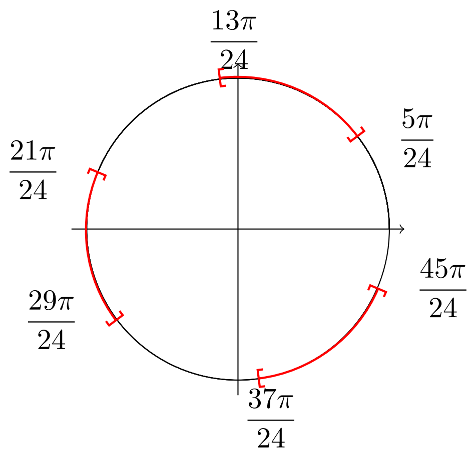
Ainsi, on obtient : (2) $\Leftrightarrow X \in]-2, 0[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[\Leftrightarrow -2 < \cos(x) < 0$ ou $\frac{1}{2} < \cos(x)$.
La résolution par le cercle trigonométrique donne :
$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}, \left(\left] \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right[\cup \left] -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right[\right)}$.
Ainsi : $\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left[0, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\left] \frac{5\pi}{3}, 2\pi \right] \text{ et } \mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left] -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right].}$

3. **Résolution de** $\cos(\mathbf{3x}) \leq -\sin\left(\mathbf{3x} + \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}\right)$ $(\star)$ **:**

$$\begin{aligned}
(\star) \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(3x) + \sin(3x + \frac{\pi}{4}) \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos(3x) + \cos(\frac{\pi}{2} - 3x - \frac{\pi}{4}) \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos(3x) + \cos(\frac{\pi}{4} - 3x) \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(3x - \frac{\pi}{8}\right) \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(3x - \frac{\pi}{8}\right) \leq 0 \qquad\qquad \text{car } 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0.
\end{aligned}$$

On s'est donc ramené à une inéquation fondamentale que l'on résout graphiquement sur le cercle trigonométrique (à faire).

$$\begin{aligned}
(\star) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 3x - \frac{\pi}{8} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{5\pi}{8} + 2k\pi \leq 3x \leq \frac{13\pi}{8} + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{5\pi}{24} + \frac{2k\pi}{3} \leq x \leq \frac{13\pi}{24} + \frac{2k\pi}{3}.
\end{aligned}$$



On obtient donc :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{5\pi}{24} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{13\pi}{24} + \frac{2k\pi}{3}\right]}.$$

On obtient finalement :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left[\frac{5\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}\right] \cup \left[\frac{21\pi}{24}, \frac{29\pi}{24}\right] \cup \left[\frac{37\pi}{24}, \frac{45\pi}{24}\right]}.$$

Et :

$$\boxed{\mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \left]-\pi, -\frac{19\pi}{24}\right] \cup \left[-\frac{11\pi}{24}, -\frac{\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}\right] \cup \left[\frac{21\pi}{24}, \pi\right]}.$$

4. **Résolution de** $\cos(\mathbf{x}) + \cos\left(\mathbf{x} + \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}\right) > \mathbf{0}$ $(\star)$ **:**
On obtient

$$\begin{aligned}
(\star) \quad &\Leftrightarrow \quad 2\cos(x + \frac{\pi}{6})\cos(-\frac{\pi}{6}) > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos(x + \frac{\pi}{6}) > 0 \qquad\qquad \text{car } 2\cos(\frac{\pi}{6}) > 0.
\end{aligned}$$

On s'est donc ramené à une inéquation fondamentale que l'on résout graphiquement (à faire).

$$\begin{aligned}
(2) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi.
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left[0, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right[\text{ et } \mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right[}.$$

5. **Résolution de $\mathbf{2}\cos(\mathbf{x}) - \sin(\mathbf{x}) > \sin(\mathbf{3x})$ $(\star)$:**
On a

$$(\star) \Leftrightarrow 2\cos x > \sin x + \sin(3x) \Leftrightarrow 2\cos x > 2\sin(2x)\cos x \Leftrightarrow \cos x\,[1 - \sin(2x)] > 0.$$

En remarquant qu'on a toujours $\sin(2x) \leq 1$, à savoir $1 - \sin(2x) \geq 0$, l'inéquation $(\star)$ est en fait équivalente à

$$(\star) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0 \\ \text{et} \\ 1 - \sin(2x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z},\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \text{et} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

Ainsi, on obtient :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi[} = \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[\text{ et } \mathcal{S}_{]-\pi,\pi]} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[}.$$

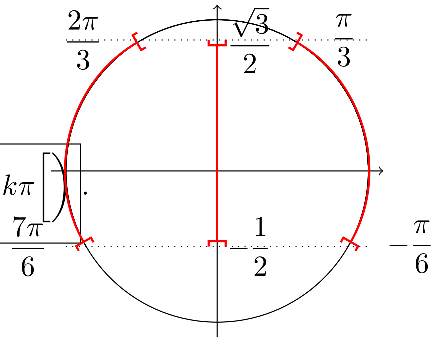
6. **Résolution de $\mathbf{4}\cos^{\mathbf{2}}(\mathbf{x}) + \mathbf{2}(\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{1})\sin(\mathbf{x}) + \sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{4} > \mathbf{0}$ $(\star)$:**
On a

$$\begin{aligned} (\star) \quad &\Leftrightarrow \quad 4(1 - \sin^2 x) + 2(\sqrt{3} - 1)\sin x + \sqrt{3} - 4 > 0 \Leftrightarrow -4\sin^2 x + 2(\sqrt{3} - 1)\sin x + \sqrt{3} > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 4\sin^2 x + 2(1 - \sqrt{3})\sin x - \sqrt{3} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \sin x \\ 4X^2 + 2(1 - \sqrt{3})X - \sqrt{3} < 0 \ (\star\star). \end{cases} \end{aligned}$$

On résout $(\star\star)$:

$$\Delta = 4(1 - \sqrt{3})^2 + 16\sqrt{3} = 4\left(1 + 3 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\right) = 4\left(1 + 3 + 2\sqrt{3}\right) = \left[2(1 + \sqrt{3})\right]^2.$$

Les solutions sont donc $X_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $X_2 = -\frac{1}{2}$. Ainsi, on obtient $(4) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$. On s'est donc ramené à des inéquations fondamentales que l'on résout graphiquement.



On obtient :

$$\boxed{\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left]-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right[\right)}.$$

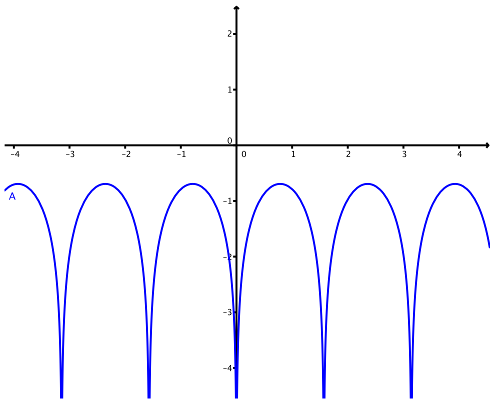
Correction 11.

1. La fonction f est bien définie si et seulement si $\cos x \sin x \neq 0$. Or on a : $\cos x \sin x = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $\exists k \in \mathbb{Z},\ x = k\pi$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Réduction d'intervalle :
   - Montrons que f est π périodique : pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a bien $x + \pi \in \mathcal{D}_f$ et $f(x + \pi) = \ln|\cos(x+\pi)\sin(x+\pi)| = \ln|-\cos x \times (-\sin x)| = \ln|\cos x \sin x| = f(x)$. Ainsi la fonction f est π périodique et on peut restreindre l'intervalle d'étude à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$.
   - Montrons que f est paire : $\mathcal{D}_f$ est centré en 0, et $\forall x \in \mathcal{D}_f$, on a : $f(-x) = \ln|\cos(-x)\sin(-x)| = \ln|\cos x \times (-\sin x)| = \ln|\cos x \sin x| = f(x)$ en utilisant le fait que la fonction cosinus est paire, la fonction sinus impaire et le fait que $|-1| = 1$. Ainsi la fonction f est paire et on peut restreindre l'étude à $]0, \frac{\pi}{2}[$.
   - Soit $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right| = \ln|\sin x \cos x| = f(x)$ en utilisant le formulaire de trigonométrie.
     On peut faire un dessin pour s'en rendre compte mais une telle égalité signifie que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ est axe de symétrie pour la courbe. Ainsi on peut étudier la fonction sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ puis faire la symétrie d'axe $x = \frac{\pi}{4}$ pour obtenir la courbe sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.
3. La fonction $x \mapsto \cos x \sin x$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ comme produit de fonctions dérivables. De plus, sur cet ensemble, cette fonction ne s'annule pas. Comme la fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, on obtient que $x \mapsto |\cos x \sin x|$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ par composition. Comme sur cet intervalle, la fonction est à valeurs strictement positives et que la fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$, f est bien dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ par composition.

   De plus, en étudiant des cas, on sait que $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$ si u dérivable. Ainsi ici on obtient que : $f'(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{\cos(2x)}{\cos x \sin x}$.
   Sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a : $\cos x > 0$, $\sin x > 0$ et $\cos(2x) \geq 0$ car $2x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi on a : $f'(x) \geq 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\ln 2$

   En effet : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ par propriétés sur les produit et composées de limites.
4. Graphe de f :



Correction 12.

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
   - Étude de la parité : $\mathbb{R}$ est centré en 0. Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(-x) = 3\cos(-x) - \cos(-3x) = 3\cos x - \cos(3x)$ car la fonction f est paire. Ainsi $f(-x) = f(x)$, et la fonction f est paire.
   - Étude de la périodicité : vérifions que la fonction est 2π périodique :
     - ⋆ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$.
     - ⋆ Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(x+2\pi) = 3\cos(x+2\pi) - \cos(3(x+2\pi)) = 3\cos(x+2\pi) - \cos(3x+6\pi) = f(x)$ en utilisant la 2π périodicité de la fonction cosinus.

     Ainsi la fonction f est 2π périodique.

   Par 2π périodicité, on peut restreindre l'étude à tout intervalle d'amplitude 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$. Puis par parité, on peut restreindre l'intervalle à $[0, \pi]$. La courbe $\mathcal{C}_f$ sera alors obtenue par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées puis par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = -3\sin x + 3\sin(3x) = -3(\sin x - \sin(3x)) = -3 \times 2\cos(2x)\sin(-x) = 6\cos(2x)\sin(x)$ en utilisant une formule de trigonométrie et le fait que la fonction sinus est impaire.
3. Étude du signe de f' sur $[0, \pi]$:
   Sur $[0, \pi]$, on a : $\sin(x) \geq 0$ et ainsi le signe de f' ne dépend que du signe de $\cos(2x)$. On a : $\cos(2x) \geq 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x \leq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} + k\pi$. En faisant un cercle trigonométrique, on remarque que sur $[0, \pi]$, on obtient : $\cos(2x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, \dfrac{\pi}{4}] \cup [\dfrac{3\pi}{4}, \pi]$. On obtient ainsi le tableau des variation suivant :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-2\sqrt{2}$	$\nearrow$	-2

4. • La fonction f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ donc la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ existe bien et son équation est : $y = f'(\frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2}) + f(\frac{\pi}{2})$. On obtient ainsi : $y = -6(x - \frac{\pi}{2})$.
   • La tangente est horizontale lorsque $f'(x) = 0$. On obtient donc : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0$ ou $\sin x = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ou $\exists k \in \mathbb{Z},\ x = k\pi$.