Correction TD 6 - Nombres Complexes

I Forme algébrique d'un nombre complexe

Correction 1. Dans cet exercice, je ne détaille pas forcément tous les calculs, je ne donne que la méthode générale ou des indications.

1. **Mettre sous forme algébrique $\mathbf{z = \frac{1-3i}{1+3i}}$:** $\boxed{z = -\frac{4}{5} - \frac{3i}{5}.}$ On a un quotient de nombres complexes dont on vaut la forme algébrique : on multiplie par le conjugué du dénominateur.
2. **Mettre sous forme algébrique $\mathbf{z = (i-\sqrt{2})^3}$:** $\boxed{z = \sqrt{2} + 5i.}$ On utilise ici une identité remarquable.
3. **Mettre sous forme algébrique $\mathbf{z = \frac{1+4i}{1-5i}}$:** $\boxed{z = -\frac{19}{26} + i\frac{9}{26}.}$ On a un quotient de nombres complexes dont on vaut la forme algébrique : on multiplie par le conjugué du dénominateur.
4. **Mettre sous forme algébrique $\mathbf{z = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^9}$:** $\boxed{z = (-i)^9 = -i.}$ Ici plusieurs méthodes marchent bien : Soit on commence par mettre sous forme exponentielle le nombre complexe $\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}$ en mettant sous forme exponentielle le numérateur d'un côté et le dénominateur de l'autre côté puis on passe à la puissance 9. Soit on commence par mettre sous forme algébrique le nombre complexe $\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}$ en multipliant par le conjugué du dénominateur et on passe à la puissance 9.
5. **Mettre sous forme algébrique $\mathbf{z = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}}$:** $\boxed{z = -1.}$ Là encore il y a plusieurs méthodes qui marchent bien. Une possibilité est de mettre sous forme exponentielle $1+i$ d'un côté et $1-i$ de l'autre côté puis de les passer au carré et enfin de faire le quotient.
6. **Mettre sous forme algébrique $\mathbf{z = \frac{1}{\frac{1}{i+1} - 1}}$:** $\boxed{z = -1 + i.}$ On peut par exemple commencer par tout mettre sous le même dénominateur en bas et on obtient $z = \frac{1}{\frac{-i}{1+i}} = \frac{1+i}{-i} = i(1+i)$.
7. **Mettre sous forme algébrique $\mathbf{z = (1+i)^{2019}}$:** $\boxed{z = -2^{1009} + 2^{1009}i.}$ Ici il faut commencer par mettre sous forme exponentielle $1+i$ et on obtient que $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Ensuite on passe à la puissance et on obtient que : $z = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2019} = 2^{1009}\sqrt{2}e^{i\frac{2019\pi}{4}}$. Il faut alors compter le nombre de tours complets que l'on a fait dans $\frac{2019\pi}{4}$. Une façon de voir les choses est d'écrire : $\frac{2019}{8} \times 2\pi$ et de faire la division euclidienne de 2019 par 8. On obtient : $2019 = 252 \times 8 + 3$ et ainsi on a : $\frac{2019}{8} \times 2\pi = 252 \times 2\pi + \frac{3\pi}{4}$. Ainsi on a : $z = 2^{1009}\sqrt{2} \times e^{i\left(252\times 2\pi + \frac{3\pi}{4}\right)} = 2^{1009}\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -2^{1009} + 2^{1009}i$.

8. **Mettre sous forme algébrique $\mathbf{z = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}}$:** $\boxed{z=-3.}$ On peut par exemple mettre sous forme algébrique chaque terme de la somme de façon séparée en multipliant par le conjugué puis on les somme.
9. **Mettre sous forme algébrique $\mathbf{z = (5-2i)^3}$:** $\boxed{z = 65-142i.}$ On utilise une identité remarquable.
10. **Mettre sous forme algébrique $\mathbf{z = \frac{1}{(4-i)(3+2i)}}$:** $\boxed{z = \frac{14}{221} - i\frac{5}{221}.}$ On peut multiplier par le conjugué du dénominateur à savoir $(4+i)(3-2i)$.
11. **Mettre sous forme algébrique $\mathbf{z = \frac{(3+i)(2-3i)}{-2i+5}}$:** $\boxed{z = \frac{69}{29} - i\frac{17}{29}.}$ On multiplie par le conjugué du dénominateur.
12. **Mettre sous forme algébrique $\mathbf{z = (\sqrt{3}-2i)^4}$:** $\boxed{z = -47+8\sqrt{3}i.}$ On développe avec le binôme de Newton.

Correction 2.

- **Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $\mathbf{(x+i)^2}$:** En développant $(x+i)^2$, on obtient $(x+i)^2 = (x^2-1)+2ix$. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Re}\left[(x+i)^2\right] = x^2-1 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left[(x+i)^2\right] = 2x.}$$

- **Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $\mathbf{\frac{x-3i}{x^2+1-2ix}}$:** On a : $\frac{x-3i}{x^2+1-2ix} = \frac{(x-3i)(x^2+1+2ix)}{x^4+6x^2+1}$. Ainsi, on obtient

$$\boxed{\mathrm{Re}\left(\frac{x-3i}{x^2+1-2ix}\right) = \frac{x(x^2+7)}{x^4+6x^2+1} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left(\frac{x-3i}{x^2+1-2ix}\right) = \frac{-x^2-3}{x^4+6x^2+1}.}$$

II Forme trigonométrique ou exponentielle d'un nombre complexe

Correction 3. Dans cet exercice, je ne détaille pas forcément tous les calculs, je ne donne que la méthode générale ou des indications.

1. **Mettre sous forme exponentielle $\mathbf{z = -18}$:** $\boxed{z = 18e^{i\pi}}$. On a en effet commencé par calculer le module qui vaut 18, puis on a mis en facteur le module et on a mis -1 sous forme exponentielle.
2. **Mettre sous forme exponentielle $\mathbf{z = -7i}$:** $\boxed{z = 7e^{-i\frac{\pi}{2}}.}$ On a en effet commencé par calculer le module qui vaut 7. Puis on a mis en facteur le module et on a mis $-i$ sous forme exponentielle.
3. **Mettre sous forme exponentielle $\mathbf{z = 1+i}$:** $\boxed{z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.}$ On a calculé le module qui vaut $\sqrt{2}$ et on l'a mis en facteur.

4. **Mettre sous forme exponentielle $\mathbf{z = (1+i)^5}$:** On commence par mettre $1+i$ sous forme exponentielle et on obtient que $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi on obtient que $(1+i)^5 = (\sqrt{2})^5 e^{i\frac{5\pi}{4}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$. Ainsi on a : $\boxed{z = 4\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}.}$

5. **Mettre sous forme exponentielle $\mathbf{z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}}$:** $\boxed{z = e^{i\frac{\pi}{2}}.}$ Ici on peut par exemple mettre sous forme exponentielle d'un côté le numérateur et de l'autre côté le dénominateur. Puis on utilise les propriétés sur les quotients d'exponentielles.

6. **Mettre sous forme exponentielle $\mathbf{z = -2e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$:** Ici le calcul du module donne $|z| = 2$ car pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $|e^{i\theta}| = 1$. On a donc : $z = 2\left[-1 \times e^{\frac{i\pi}{3}} \times e^{-\frac{i\pi}{4}}\right] = 2e^{i\frac{13\pi}{12}}$. Ainsi on a : $\boxed{z = 2e^{i\frac{13\pi}{12}}.}$

7. **Mettre sous forme exponentielle $\mathbf{z = -10e^{i\pi}\left(\dfrac{2e^{i\frac{5\pi}{8}}}{e^{i\frac{7\pi}{4}}}\right)^6}$:** Même type de calcul qui utilise les propriétés de l'exponentielle. Ici le module vaut $10 \times 2^6 = 640$ et on obtient que $z = 640e^{i\frac{-27\pi}{4}}$. On simplifie alors $e^{i\frac{-27\pi}{4}}$ en remarquant par exemple que $\dfrac{-27\pi}{4} = \dfrac{-28\pi+\pi}{4} = -7\pi + \dfrac{\pi}{4}$. Ainsi on a : $e^{i\frac{-27\pi}{4}} = e^{i(\pi+\frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$. Ainsi on a : $\boxed{z = 640e^{i\frac{5\pi}{4}}.}$

8. **Mettre sous forme exponentielle $\mathbf{z = -5\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)\right)}$:** $\boxed{z = 5e^{i(\frac{2\pi}{5}+\pi)} = 5e^{\frac{7i\pi}{5}}.}$ En effet on a : $z = -5e^{i\frac{2\pi}{5}} = 5e^{i\pi}e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

9. **Mettre sous forme exponentielle $\mathbf{z = \dfrac{1}{\frac{i}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}}}$:** Mettons tout d'abord sous forme exponentielle $Z = \dfrac{i}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. On a $|Z| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, ainsi,
$$Z = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{2i\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}j.$$
Ainsi comme $z = \dfrac{1}{Z}$, on obtient : $\boxed{z = \sqrt{3}e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \sqrt{3}j^2.}$

10. **Mettre sous forme exponentielle $\mathbf{z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}}$:** On commence par mettre ce qui est à l'intérieur de la parenthèse sous forme exponentielle. Comme c'est un quotient, on met sous forme exponentielle de façon séparée le numérateur et le dénominateur et on obtient que : $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$. Ainsi on obtient : $z = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{20} = 2^{10}e^{i\frac{140\pi}{12}} = 2^{10}e^{i\frac{35\pi}{3}} = 2^{10}e^{i\pi(10+\frac{5}{3})} = 2^{10} \times e^{10i\pi} \times e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2^{10}e^{i\frac{5\pi}{3}}$. Ainsi on a : $\boxed{z = 2^{10}e^{i\frac{5\pi}{3}}.}$

11. **Mettre sous forme exponentielle $\mathbf{z = \dfrac{1}{1+i\tan\theta}}$, $\mathbf{\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$:** Commençons par calculer le module. Le formulaire de trigonométrie donne $|z| = |\cos\theta|$. Il faut donc discuter selon le signe du cosinus.
   - Si $\cos\theta \geq 0$, c'est-à-dire si $\exists k \in \mathbb{Z},\ -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$,alors
$$z = \cos\theta \times \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta e^{-i\theta}.$$

- Si $\cos\theta \leq 0$, c'est-à-dire si $\exists k \in \mathbb{Z},\ \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$,alors
$$z = -\cos\theta \times \frac{-1}{\cos\theta + i\sin\theta} = -\cos\theta e^{i\pi}e^{-i\theta} = -\cos\theta e^{i(\pi-\theta)}.$$

12. **Mettre sous forme exponentielle** $\mathbf{z} = \left(\dfrac{\mathbf{1} + \mathbf{i}\tan(\theta)}{\mathbf{1} - \mathbf{i}\tan(\theta)}\right)^{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N},\ \theta \neq \dfrac{\pi}{\mathbf{2}} + \mathbf{k}\pi,\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}$ **:** Ici plusieurs méthodes sont possibles. On peut par exemple commencer par simplifier le quotient $\dfrac{1 + i\tan(\theta)}{1 - i\tan(\theta)}$. On obtient en utilisant la définition de la tangente :
$$\frac{1 + i\tan(\theta)}{1 - i\tan(\theta)} = \frac{\frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{\frac{\cos(\theta) - i\sin(\theta)}{\cos(\theta)}} = \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta)}{\cos(\theta) - i\sin(\theta)}.$$
Il suffit alors de remarquer que : $\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$ et que $\cos(\theta) - i\sin(\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$ en utilisant la définition de $e^{i\theta}$, la parité du cosinus et l'imparité du sinus. Ainsi on obtient que : $\dfrac{1 + i\tan(\theta)}{1 - i\tan(\theta)} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$. En passant à la puissance n, on obtient que : $\boxed{z = e^{2in\theta}.}$

Correction 4.

- **Calculer le module de $\mathbf{z_1} = \mathbf{t^2} + \mathbf{2ti} - \mathbf{1}$:** On a
$$|z_1|^2 = (t^2-1)^2 + 4t^2 = t^4 + 2t^2 + 1 = (1+t^2)^2.$$
Ainsi, $\boxed{|z_1| = \sqrt{(1+t^2)^2} = |1+t^2| = 1+t^2}$ car la somme de deux nombres positifs est positive.
- **Calculer le module de $\mathbf{z_2} = \mathbf{1} - \cos(\mathbf{t}) + \mathbf{i}\sin(\mathbf{t})$:** On a :
$$|z_2|^2 = (1-\cos t)^2 + \sin^2 t = 2(1-\cos t) = 4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right).$$
Ainsi, $|z_2| = 2|\sin\left(\frac{t}{2}\right)|$. Il faut alors discuter selon le signe du sinus qui n'est pas toujours positif.
  - ⋆ Si $\sin\left(\dfrac{t}{2}\right) \geq 0$, on a $\boxed{|z_2| = 2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right).}$ Étude de $\sin\left(\dfrac{t}{2}\right) \geq 0$:
$$\sin\left(\frac{t}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 0 + 2k\pi \leq \frac{t}{2} \leq \pi + 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 4k\pi \leq t \leq 2\pi + 4k\pi.$$
  - ⋆ Si $\sin\left(\dfrac{t}{2}\right) \leq 0$, on a $\boxed{|z_2| = -2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right).}$ Étude de $\sin\left(\dfrac{t}{2}\right) \leq 0$:
$$\sin\left(\frac{t}{2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \pi + 2k\pi \leq \frac{t}{2} \leq 2\pi + 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 2\pi + 4k\pi \leq t \leq 4\pi + 4k\pi.$$
- **Mettre $\mathbf{z_2}$ sous forme exponentielle :** On distingue donc deux cas selon le signe de $\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

* ⋆ Cas 1 : Lorsque t vérifie : $\exists k \in \mathbb{Z},\ 4k\pi\ < t < 2\pi + 4k\pi$ (0 ne se met pas sous forme exponentielle, il faut donc étudier uniquement les nombres complexes non nuls ce qui explique les inégalités strictes) :

  On a alors $|z_2| = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ et donc

$$
\begin{aligned}
z_2 &= 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\left[\frac{1-\cos(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} + i\frac{\sin(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right] \\
&= 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\left[\frac{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} + i\frac{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right] \\
&= 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{t}{2}\right) + i\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right] \\
&= 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\left[i\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) - i\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right] \\
&= 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\left[i\left(\cos\left(-\frac{t}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{t}{2}\right)\right)\right] \\
&= 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\left[e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{-i\frac{t}{2}}\right] \\
&= 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)e^{i\frac{\pi-t}{2}}
\end{aligned}
$$

  Dans ce cas, on a donc obtenu que $\boxed{z_2 = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)e^{i\frac{\pi-t}{2}}.}$

* ⋆ Cas 2 : Lorsque t vérifie : $\exists k \in \mathbb{Z},\ 2\pi + 4k\pi < t < 4\pi + 4k\pi$:

  On a alors $|z_2| = -2\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ et donc en refaisant le même type de raisonnement que ci-dessus :

$$
z_2 = -2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\left[-e^{i\frac{\pi-t}{2}}\right] = -2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\left[e^{i\pi}e^{i\frac{\pi-t}{2}}\right] = -2\sin\left(\frac{t}{2}\right)e^{i\frac{3\pi-t}{2}}.
$$

  Dans ce cas, on a donc obtenu que $\boxed{z_2 = -2\sin\left(\frac{t}{2}\right)e^{i\frac{3\pi-t}{2}}.}$

* **Autre méthode :** On peut également utiliser la méthode de l'angle moitié. On a en effet :

$$
z_2 = 1 - \cos t + i\sin t = 1 - e^{-it} = e^{-i\frac{t}{2}}\left(e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}\right) = 2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)e^{-i\frac{t}{2}} = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)e^{i\frac{\pi-t}{2}}.
$$

  On reprend ensuite les mêmes cas, et on obtient les mêmes résultats que précédemment.

Correction 5. Module et argument de $1+u$ avec u de module 1 :
Comme $u \in \mathbb{C}$ est un complexe de module 1, il s'écrit sous la forme $u = e^{i\varphi}$ avec φ un argument.

Par la méthode des angles moitiés, on obtient :

$$1+u=e^{i0}+e^{i\varphi}=e^{\frac{i\varphi}{2}}\left(e^{-\frac{i\varphi}{2}}+e^{\frac{i\varphi}{2}}\right)=2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)e^{\frac{i\varphi}{2}}.$$

Ainsi, $|1+u|=2\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right|$ et il faut étudier le signe de $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$.

- Si $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\geq 0$, alors $\begin{cases}|1+u|=2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\\ \arg(1+u)\equiv\frac{\varphi}{2}[2\pi].\end{cases}$

  Et la résolution de $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\geq 0$ donne

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\geq 0\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq\frac{\varphi}{2}\leq\frac{\pi}{2}+2k\pi\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\ -\pi+4k\pi\leq\varphi\leq\pi+4k\pi.$$

- Si $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\leq 0$, alors $\begin{cases}|1+u|=-2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\\ \arg(1+u)\equiv\frac{\varphi}{2}+\pi[2\pi].\end{cases}$

  En effet, $-1=e^{i\pi}$.
  Et la résolution de $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\leq 0$ donne

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\leq 0\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\leq\frac{\varphi}{2}\leq\frac{3\pi}{2}+2k\pi\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\ \pi+4k\pi\leq\varphi\leq 3\pi+4k\pi.$$

Correction 6.

1. **Module et argument de $\mathbf{Z=\frac{1+\cos a+i\sin a}{1+\cos b+i\sin b}}$:**

   On peut remarquer que : $\frac{1+\cos a+i\sin a}{1+\cos b+i\sin b}=\frac{1+e^{ia}}{1+e^{ib}}$. On utilise donc la méthode de l'angle moitié pour le numérateur et le dénominateur. On obtient

$$\frac{1+\cos a+i\sin a}{1+\cos b+i\sin b}=\frac{e^{\frac{ia}{2}}2\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{e^{\frac{ib}{2}}2\cos\left(\frac{b}{2}\right)}=\frac{e^{\frac{ia}{2}}\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{e^{\frac{ib}{2}}\cos\left(\frac{b}{2}\right)}.$$

   On peut remarquer que ce nombre est bien défini car le dénominateur est bien non nul car on a supposé que b n'est pas de la forme $2k\pi+\pi$ donc $\frac{b}{2}$ n'est pas de la forme $k\pi+\frac{\pi}{2}$ avec $k\in\mathbb{Z}$ et ainsi $\cos\left(\frac{b}{2}\right)$ ne s'annule pas. On obtient donc

$$Z=\frac{1+\cos a+i\sin a}{1+\cos b+i\sin b}=\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)}e^{i\frac{a-b}{2}}.$$

   - Calcul du module : $|Z|=\left|\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)}\right|$. Ainsi, il faut étudier des cas selon le signe de ce qui est à l'interieur du module.

- Cas 1 : Si $\dfrac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} > 0$, à savoir s'ils sont tous les deux positifs ou tous les deux négatifs, on obtient alors :
$$|Z| = \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} \quad \text{et} \quad Z = \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} e^{i\frac{a-b}{2}}.$$
Z est alors bien sous forme exponentielle et un argument de Z est $\dfrac{a-b}{2}$.
- Cas 2 : Si $\dfrac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} < 0$, à savoir si l'un est négatif et l'autre positif, on obtient alors :
$$|Z| = -\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} \quad \text{et} \quad Z = -\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} \left(-e^{i\frac{a-b}{2}}\right) = -\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} e^{i\left(\frac{a-b}{2}+\pi\right)}.$$
Z est alors bien sous forme exponentielle et un argument de Z est $\dfrac{a-b}{2} + \pi$.

2. **Déterminer la forme exponentielle de $\mathbf{Z = \dfrac{1-\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)}{1-\sin(\beta) + i\cos(\beta)}}$** : on utilise le même type de raisonnement, en remarquant que :
$$Z = \frac{1-(\cos\alpha - i\sin\alpha)}{1+i(\cos\beta - i\sin\beta)} = \frac{1-e^{-i\alpha}}{1+ie^{-i\beta}} = \frac{1-e^{-i\alpha}}{1+e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}}.$$
On utilise ensuite la méthode de l'angle moitié, et on distingue 3 cas :
   - Si $\dfrac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} > 0$, alors $Z = \dfrac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} e^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$.
   - Si $\dfrac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = 0$, alors $Z = 0$ et n'admet pas de forme exponentielle.
   - Si $\dfrac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} < 0$, alors $Z = -\dfrac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} e^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)}$.

Correction 7.

1. **Calcul de $\mathbf{j^3}$ et de $\mathbf{1+j+j^2}$** :
On a : $j^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1$. Pour le calcul de $1+j+j^2$, on reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $j \neq 1$ et ainsi
$$1+j+j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = 0.$$

2. **Calcul de $\mathbf{(1+j)^5}$, $\mathbf{\dfrac{1}{(1+j)^4}}$ et de $\mathbf{\dfrac{1}{1-j^2}}$** :
   - $(1+j)^5 = (-j^2)^5 = -j^{10} = -j^9 \times j = -j = -e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
   - $\dfrac{1}{(1+j)^4} = \dfrac{1}{(-j^2)^4} = \dfrac{1}{j^8} = \dfrac{1}{j^2} = j^{-2} = e^{\frac{-4i\pi}{3}} = j$.

- En remarquant que $\overline{j^2} = j$, on obtient :

$$\frac{1}{1-j^2} = \frac{1-\overline{j^2}}{(1-j^2)(1-\overline{j^2})} = \frac{1-j}{1-j^2-\overline{j^2}-|j^2|} = \frac{1-j}{1+1+1} = \frac{1-j}{3}.$$

III Applications des nombres complexes

Correction 8.

1. **Linéariser $\sin^5 x$** : on utilise la formule d'Euler, puis on développe grâce à la formule du binôme de Newton. Il suffit ensuite de rassembler les exponentielles conjuguées, et d'appliquer à nouveau la formule d'Euler dans l'autre sens.

$$\begin{aligned}
\sin^5 x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 \\
&= \frac{1}{32i}\left(e^{5ix} - 5e^{4ix}e^{-ix} + 10e^{3ix}e^{-2ix} - 10e^{2ix}e^{-3ix} + 5e^{ix}e^{-4ix} - e^{-5ix}\right) \\
&= \frac{1}{32i}\left(e^{5ix} - e^{-5ix} + 5(-e^{3ix} + e^{-3ix}) + 10(e^{ix} - e^{-ix})\right) \\
&= \frac{1}{32i}\left(2i\sin(5x) - 10i\sin(3x) + 20i\sin x\right)
\end{aligned}$$

On obtient finalement : $\boxed{\sin^5 x = \frac{\sin(5x)}{16} - \frac{5}{16}\sin(3x) + \frac{5}{8}\sin x}$.

Une primitive est donc donnée par : $F(x) = -\frac{1}{80}\cos(5x) + \frac{5}{48}\cos(3x) - \frac{5}{8}\cos x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

2. **Linéariser $\sin^3 x \cos^2 x$** : Attention de ne pas linéariser séparemment les deux termes ! Il faut ici développer toutes les exponentielles, avant de repasser aux cosinus et sinus.

$$\begin{aligned}
\sin^3 x\cos^2 x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{-1}{8i} \times \frac{1}{4} \times \left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right)\left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right) \\
&= \frac{-1}{32i}\left(e^{5ix} + 2e^{3ix} + e^{ix} - 3e^{3ix} - 6e^{ix} - 3e^{-ix} + 3e^{ix} + 6e^{-ix} + 3e^{-3ix} - e^{-ix} - 2e^{-3ix} - e^{-} \right. \\
&= \frac{-1}{32i}\left(e^{5ix} - e^{-5ix} - (e^{3ix} - e^{-3ix}) - 2(e^{ix} - e^{-ix})\right) \\
&= \frac{-1}{32i}\left(2i\sin(5x) - 2i\sin(3x) - 4i\sin x\right)
\end{aligned}$$

On obtient : $\boxed{\sin^3 x\cos^2 x = -\frac{\sin(5x)}{16} + \frac{\sin(3x)}{16} + \frac{\sin x}{8}}$.

Une primitive est donc donnée par : $F(x) = \frac{\cos(5x)}{80} - \frac{\cos(3x)}{48} - \frac{\cos x}{8} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

3. **Linéariser $\cos^6 x$** : On obtient : $\boxed{\cos^6 x = \frac{\cos(6x)}{32} + \frac{3\cos(4x)}{16} + \frac{15\cos(2x)}{32} + \frac{5}{8}}$.

   Une primitive est donc donnée par : $F(x) = \frac{\sin(6x)}{192} + \frac{3\sin(4x)}{64} + \frac{15\sin(2x)}{64} + \frac{5}{8}x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

4. **Linéariser $\sin^6(x)$** : On obtient : $\boxed{\sin^6(x) = -\frac{\cos(6x)}{32} + \frac{3}{16}\cos(4x) - \frac{15}{32}\cos(2x) + \frac{5}{16}}$.

   Une primitive est donc donnée par : $F(x) = \frac{-1}{192}\sin(6x) + \frac{3}{64}\sin(4x) - \frac{15}{64}\sin(2x) + \frac{5}{16}x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

5. **Linéariser $\sin^4(x)\cos^3(x)$** : On obtient :
   $\boxed{\sin^4(x)\cos^3(x) = \frac{1}{2^6}\left(\cos(7x) - \cos(5x) - 3\cos(3x) + 3\cos(x)\right)}$.

   Une primitive est donc donnée par :

   $$F(x) = \frac{1}{2^6}\left(\frac{\sin(7x)}{7} - \frac{\sin(5x)}{5} - \sin(3x) + 3\sin(x)\right) + C,$$

   avec $C \in \mathbb{R}$.

6. **Linéariser $\sin^4(x)\cos^4(x)$** : On obtient : $\boxed{\sin^4(x)\cos^4(x) = \frac{1}{2^7}\left(\cos(8x) - 4\cos(4x) + 3\right)}$.

   Une primitive est donc donnée par : $F(x) = \frac{1}{2^7}\left(\frac{\sin(8x)}{8} - \sin(4x) + 3x\right) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Correction 9.

1. Il s'agit ici d'utiliser la formule de Moivre pour exprimer le cosinus comme la partie réelle d'une exponentielle complexe, et le sinus comme sa partie imaginaire. Puis on calcule l'exponentielle comme une puissance, en développant grâce à la formule du binôme de Newton, et on identifie la partie réelle et la partie imaginaire.
   - On a $\cos(3x) = \mathrm{Re}(e^{3ix})$. On a de plus :

     $$\begin{aligned} e^{3ix} &= (e^{ix})^3 = = (\cos x + i\sin x)^3 \\ &= \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x \end{aligned}$$

     On a donc $\cos(3x) = \mathrm{Re}(\cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x) = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$, soit, en utilisant $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$: $\boxed{\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x}$.
   - De même, on remarque que $\sin(4x) = \mathrm{Im}(e^{4ix})$. La même méthode donne : $\sin(4x) = 4\cos x\sin x\,(\cos^2 x$
2. - On applique la même méthode, et on obtient :

     $$\cos(5x) = \cos^5(x) - 10\cos^3(x)\sin^2(x) + 5\cos(x)\sin^4(x)$$

     $$\sin(5x) = \sin^5(x) - 10\cos^2(x)\sin^3(x) + 5\cos^4(x)\sin(x).$$

- On commence par exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos x$ uniquement :

$$\begin{aligned}\cos(5x) &= \cos^5(x) - 10\cos^3(x)(1-\cos^2(x) + 5\cos(x)(1-\cos^2(x))^2\\ &= 16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5.\end{aligned}$$

En prenant $x = \dfrac{\pi}{10}$ dans la relation précédente, on a alors :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) = 16\cos^5\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20\cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5.$$

En remarquant que $\cos\left(\dfrac{5\pi}{10}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, on obtient que $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$ est solution de l'équation :

$$16X^5 - 20X^3 + 5 = 0 \Leftrightarrow X(16X^4 - 20X^2 + 5) = 0.$$

Ainsi c'est équivalent à : $X = 0$ ou à $16X^4 - 20X^2 + 5 = 0$. Comme $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right) \neq 0$, on doit donc résoudre : $16X^4 - 20X^2 + 5 = 0$. On pose encore $Y = X^2$ afin de se ramener à une équation du second degré en Y et on obtient : $16Y^2 - 20Y + 5 = 0$. Les solutions sont alors $Y = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$ ou $Y = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$. Ainsi, comme $Y = X^2$, on a

$$X = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \text{ ou } X = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \text{ ou } X = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \text{ ou } X = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

Comme $\dfrac{\pi}{10} \in \left]0, \dfrac{\pi}{6}\right[$, on sait, le cosinus étant décroissant sur cet intervalle que : $0 < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < \cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right) < 1$. En particulier, il ne peut pas être négatif, donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$ vaut $\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$ ou $\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$. Or on a :

$$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \Leftrightarrow 2 < 5 - \sqrt{5} < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < \frac{5-\sqrt{5}}{8} < \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} < \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

En particulier, on a : $\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}} < \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, et donc $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}}$.

Correction 10.

1. **Résolution de $(\mathbf{z+1})^2 + (\mathbf{2z+3})^2 = \mathbf{0}$:** On reconnaît un trinôme :

$$(z+1)^2 + (2z+3)^2 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 1 + 4z^2 + 12z + 9 = 0 \Leftrightarrow 5z^2 + 14z + 10 = 0.$$

Le discriminant vaut $\Delta = 14^2 - 4 \times 5 \times 10 = 4(49 - 50) = -4$. Les solutions sont donc $z_1 = \dfrac{-14-2i}{10} = \dfrac{-7-i}{5}$ et $z_2 = \dfrac{-7+i}{5}$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-7-i}{5}, \dfrac{-7+i}{5}\right\}}$.

2. **Résolution de $\mathbf{2z^2(1-\cos(2\theta)) - 2z\sin(2\theta) + 1 = 0}$:** on fait deux cas, car le coefficient du z^2 peut s'annuler.
   - Si $1-\cos(2\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos(2\theta) = 1 \Leftrightarrow\ \exists k \in \mathbb{Z}, 2\theta = 2k\pi \Leftrightarrow\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = k\pi$.
     On a alors $\sin(2\theta) = 0$, et on doit donc résoudre : $0+0+1 = 0$, ce qui est impossible. Donc $\mathcal{S}_1 = \emptyset$.
   - Si $1-\cos(2\theta) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, \theta \neq k\pi$.
     C'est une équation du second degré en z, on calcule donc le discriminant et on obtient
     $$\begin{aligned}\Delta &= 4\sin^2(2\theta) - 8(1-\cos(2\theta))\\ &= 4\left(2\sin(\theta)\cos(\theta)\right)^2 - 8\times 2\sin^2(\theta)\\ &= 16\sin^2(\theta)(\cos^2(\theta)-1)\\ &= -16\sin^4(\theta).\end{aligned}$$
     Ainsi $\Delta < 0$ et $\sqrt{-\Delta} = 4\sin^2(\theta)$. On obtient alors $z_1 = \dfrac{2\sin(2\theta) + 4i\sin^2(\theta)}{4\times 2\sin^2(\theta)} = \dfrac{1}{2}(\cot(\theta)+i)$ en utilisant le fait que $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$. Et les racines étant alors complexes conjuguées, on obtient : $z_2 = \dfrac{1}{2}(\cot(\theta)-i)$. Ainsi $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{2}(\cot(\theta)-i), \dfrac{1}{2}(\cot(\theta)+i)\right\}}$.
3. **Résolution de $\exp(\mathbf{z}) = \mathbf{3+\sqrt{3}i}$:**
   On commence par mettre $3+\sqrt{3}i$ sous forme exponentielle : on obtient $3+\sqrt{3}i = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$. On pose $z = a+ib$, avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On doit alors résoudre :
   $$e^a e^{ib} = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}.$$
   Par identification du module et de l'argument, on obtient $e^a = 2\sqrt{3}$, soit $a = \ln(2\sqrt{3})$, et $b = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$. On a donc comme solutions :
   $$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\ln(2\sqrt{3}) + i\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right), k\in\mathbb{Z}\right\}}.$$

Correction 11.

1. **Résolution de $\mathbf{z^2 = i}$:** Comme 0 n'est pas solution, on cherche les solutions z sous la forme exponentielle $z = re^{i\theta}$ avec $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$.
   $$z^2 = i \Leftrightarrow r^2e^{2i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 1\\ \exists k\in\mathbb{Z},\ 2\theta = \dfrac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1\\ \exists k\in\mathbb{Z},\ \theta = \dfrac{\pi}{4}+k\pi.\end{cases}$$
   Ainsi,
   $$\boxed{\mathcal{S} = \left\{e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}\right\} = \left\{\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right\}.}$$
2. **Résolution de $\mathbf{z^3 = i}$:** Comme 0 n'est pas solution, on cherche les solutions z sous la forme exponentielle $z = re^{i\theta}$ avec $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$.
   $$z^3 = i \Leftrightarrow r^3e^{3i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 1\\ \exists k\in\mathbb{Z},\ 3\theta = \dfrac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1\\ \exists k\in\mathbb{Z},\ \theta = \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\pi}{3}.\end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{e^{i\frac{\pi}{6}},e^{i\frac{5\pi}{6}},e^{i\frac{3\pi}{2}}\right\}=\left\{\frac{\sqrt{3}+i}{2},\frac{-\sqrt{3}+i}{2},-i\right\}.}$$

3. **Résolution de $\mathbf{z^4=-4}$:** 0 n'est pas solution, on cherche donc les solutions sous la forme $z=re^{i\theta}$ avec $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$. On obtient alors

$$z^4=-4\Leftrightarrow r^4e^{4i\theta}=4e^{i\pi}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}r^4=4\\ \\ \exists k\in\mathbb{Z},\ 4\theta=\pi+2k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}r=\sqrt{2}\\ \\ \exists k\in\mathbb{Z},\ \theta=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}.\end{array}\right.$$

Ainsi, les solutions sont $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}},\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}},\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right\}.}$

4. **Résolution de $\mathbf{z^2=3-4i}$:**
   - On commence par essayer d'appliquer la méthode du cours et on cherche donc à mettre $3-4i$ sous forme exponentielle. On ne trouve pas de forme exponentielle simple. Pour les racines secondes d'un nombre complexe, il existe aussi une autre méthode qui utilise la forme algébrique.
   - Méthode avec la forme algébrique pour les racines SECONDES d'un nombre complexe. On cherche donc z sous la forme $z=x+iy$. On obtient donc

$$z^2=3-4i\Leftrightarrow(x+iy)^2=3-4i\Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi=3-4i\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=3\\ \\ 2xy=-4.\end{array}\right.$$

   On obtient donc, car $xy=-2$, donc $x\neq 0$:

$$z^2=3-4i\quad\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=3\\ \\ y=-\dfrac{2}{x}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-\dfrac{4}{x^2}=3\\ \\ y=-\dfrac{2}{x}\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}x^4-3x^2-4=0\\ \\ y=-\dfrac{2}{x}\end{array}\right.$$

   Dans la première équation on pose $X=x^2$. On obtient alors : $X^2-3X-4=0$, dont les solutions sont $X_1=-1$ et $X_2=4$. On revient à x : on a $x^2=-1$ qui est impossible, ou $x^2=4\Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$. On en déduit dont grâce à la deuxième équation :

$$z^2=3-4i\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcr}x&=&2\\ b&=&-1\end{array}\right.\text{ ou }\left\{\begin{array}{rcr}x&=&-2\\ b&=&1\end{array}\right.$$

   Ainsi, les solutions sont $\boxed{\mathcal{S}=\{2-i,-2+i\}.}$

5. **Résolution de $\mathbf{z^4=j}$:** 0 n'est pas solution, on cherche donc les solutions z sous la forme $z=re^{i\theta}$ avec $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$. On obtient

$$z^4=j\Leftrightarrow r^4e^{4i\theta}=j\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}r^4=1\\ \\ \exists k\in\mathbb{Z},\ 4\theta=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}r=1\\ \\ \exists k\in\mathbb{Z},\ \theta=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}.\end{array}\right.$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S}=\left\{e^{i\frac{\pi}{6}},e^{i\frac{2\pi}{3}},e^{i\frac{-5\pi}{6}},e^{i\frac{-\pi}{3}}\right\}.}$

Correction 12.

1. **Résolution de $\mathbf{z^n = (z-1)^n}$:** On peut tout de suite remarquer que $z=1$ n'est pas solution. On obtient alors pour tout $z \neq 1$,
$$\begin{aligned} z^n = (z-1)^n &\Leftrightarrow \left(\frac{z}{z-1}\right)^n = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \{0,\dots,n-1\},\ \frac{z}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \qquad \text{(racines } n\text{-ièmes de l'unité)} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \{0,\dots,n-1\},\ z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z-1). \end{aligned}$$
Si $k=0$, $z=z-1$ n'a pas de solution. Ainsi, on peut prendre $k \in \{1,\dots,n-1\}$. On obtient alors
$$\begin{aligned} z^n = (z-1)^n &\Leftrightarrow \exists k \in \{1,\dots,n-1\},\ z(1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = -e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \{1,\dots,n-1\},\ z = \frac{-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{e^{\frac{ik\pi}{n}} \times \left(-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \{1,\dots,n-1\},\ z = e^{\frac{ik\pi}{n}} \frac{-i}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} e^{i\frac{k\pi}{n} + \frac{3pi}{2}}. \end{aligned}$$
Donc on a : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} e^{i\frac{k\pi}{n} + \frac{3pi}{2}}, k \in [\![1, n-1]\!] \right\}}$

2. Exercice très classique : L'idée ici est de se ramener à la résolution d'une équation type racine n-ième de l'unité.
   - Comme 1 n'est pas solution de l'équation, on peut supposer que $z \neq 1$. Ainsi, on peut bien diviser par $(z-1)^n$ qui est bien non nul. Ainsi, on a
   $$(z+1)^n = (z-1)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1 \Leftrightarrow Z^n = 1$$
   en posant $Z = \frac{z+1}{z-1}$.
   - Résolution des racines n-ième de l'unité : à savoir faire : voir cours :
   On obtient donc que les solutions sont les Z de la forme
   $$Z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in [\![0, n-1]\!].$$
   - On repasse alors à z et on cherche donc les z tels que : $\frac{z+1}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ fixé. On obtient alors
   $$\frac{z+1}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow z+1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z-1) \Leftrightarrow z\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = -e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \Leftrightarrow z\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right) = e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1.$$

Ici, il faut faire attention car on ne peut JAMAIS diviser par un nombre sans vérifier qu'il est bien NON nul. Or on a :

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 1 \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n} = 2k'\pi \Leftrightarrow k = nk'$$

avec $k' \in \mathbb{Z}$. Or $k \in [\![0, n-1]\!]$ donc le seul k qui vérifie cela est $k = 0$.

- ⋆ Pour $k = 0$, on obtient : $0 = 2$ donc il n'y a pas de solution pour $k = 0$.
- ⋆ Pour $k \neq 0$, à savoir pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on sait que $1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq 0$ et on peut donc bien diviser. On obtient
$$z = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1} = -i\cot\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$
en utilisant la méthode de l'angle moitié.

- Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{z \in \mathbb{C}, \exists k \in [\![1, n-1]\!],\ z = -i\cot\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right\}}$