

# Chapitre 6 - Nombres Complexes

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Forme cartésienne</b>	<b>1</b>
I. 1	Interprétation graphique . . . . .	2
I. 2	Conjugué d'un nombre complexe . . . . .	3
<b>II</b>	<b>Forme trigonométrique</b>	<b>6</b>
II. 1	Module d'un nombre complexe . . . . .	6
II. 2	Cercle trigonométrique . . . . .	7
II. 3	Argument d'un nombre complexe . . . . .	7
II. 4	Forme trigonométrique . . . . .	8
<b>III</b>	<b>Forme Exponentielle</b>	<b>9</b>
III. 1	Exponentielle complexe . . . . .	9
III. 2	Forme exponentielle . . . . .	10
<b>IV</b>	<b>Application des nombres complexes</b>	<b>11</b>
IV. 1	Polynôme de degré 2 . . . . .	11
IV. 2	Trigonométrie . . . . .	12
IV. 3	Suite récurrente linéaire d'ordre 2 . . . . .	13
<b>V</b>	<b>Racine <math>n</math>-eme de l'unité (Hors Programme)</b>	<b>14</b>

## I Forme cartésienne

**Définition 1.** L'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes est l'ensemble des nombres :

$$\mathbb{C} := \{x + iy \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\},$$

où  $i$  est un nombre spécial vérifiant  $i^2 = -1$ .

### Remarques :

- Cette notation s'appelle la forme **cartésienne** ou **algébrique** d'un nombre complexe.
- Deux nombres complexes sont égaux si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

**Définition 2.** Soit  $z = x + iy$  un nombre complexe. On note

$$\Re(z) = x \quad \text{et} \quad \Im(z) = y$$

On appelle respectivement ces nombres, **partie réelle** et **partie imaginaire** de  $z$ .

**Remarques :**

- Lorsque  $\Im(z) = 0$ ,  $z$  est un nombre **réel**.
- Lorsque  $\Re(z) = 0$ ,  $z$  est un nombre **imaginaire pur**. On note

$$i\mathbb{R} := \{iy \mid y \in \mathbb{R}\},$$

l'ensemble des imaginaires purs.

Les calculs sur les nombres complexes généralisent naturellement ceux sur les réels avec la condition  $i^2 = -1$

**Proposition 3.** L'addition sur les nombres complexes vaut :

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$$

La multiplication sur les nombres complexes est définie par :


$$(x + iy) \times (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

**Exemples :** Calculer  $z_1 = (1 + 5i)(3 + i)$ ,  $z_2 = \frac{1}{i}$ ,  $z_3 = \frac{1}{1+i}$  et  $z_4 = (2 - i)^2$

**Proposition 4.** Soit  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} \Re(z + z') &= \Re(z) + \Re(z') & \text{et} & & \Re(\lambda z) &= \lambda \Re(z) \\ \Im(z + z') &= \Im(z) + \Im(z') & \text{et} & & \Im(\lambda z) &= \lambda \Im(z) \end{aligned}$$

**Remarques :**

-  En général  $\Re(zz') \neq \Re(z)\Re(z')$  et  $\Im(zz') \neq \Im(z)\Im(z')$

### I. 1 Interprétation graphique

A l'instar des nombres réels qui s'identifient à la droite, les nombres complexes s'identifient au plan.

**Définition 5.** On associe à chaque nombre complexe  $z \in \mathbb{C}$  le point de  $\mathbb{R}^2$  de coordonnées  $(\Re(z), \Im(z))$ .

Inversement, pour tout point  $A$  (ou vecteur  $u$ ) de  $\mathbb{R}^2$ , de coordonnées  $A = (x_A, y_A)$  (resp  $u = (x_u, y_u)$ ) on associe le nombre complexe  $z = x_A + iy_A$  (resp.  $z = x_u + iy_u$ ). On appelle **affixe** de  $A$  (resp. de  $u$ ) ce nombre.

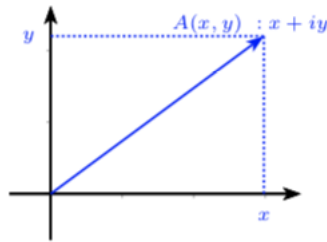
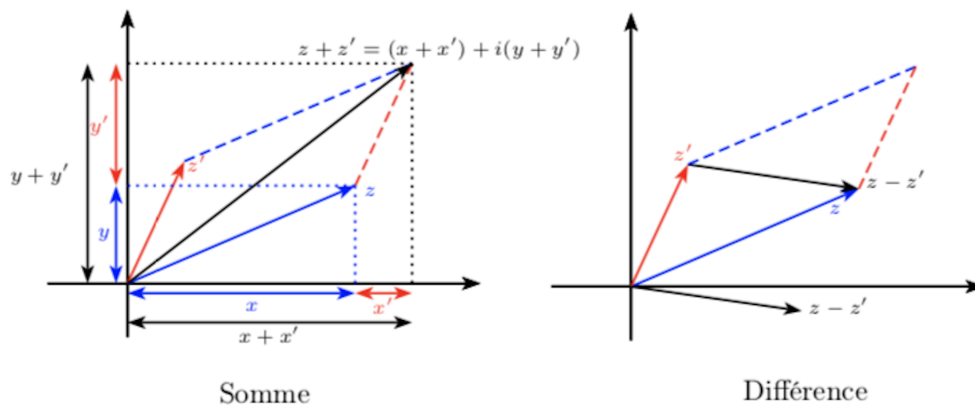
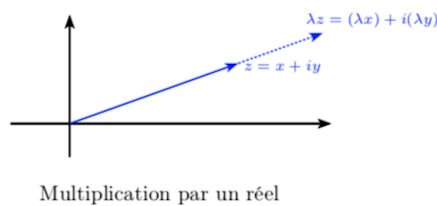


FIGURE 1 – Plan complexe et affixe

**Somme** : L'addition de deux vecteurs correspond à l'addition des affixes correspondantes :



**Multiplication** par un réel  $\lambda > 0$  correspond à faire une homothétie de rapport  $\lambda$ .



## I. 2 Conjugué d'un nombre complexe

**Définition 6.** Soit  $z = x + iy$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  un nombre complexe. On définit le conjugué de  $z$  par :

$$\bar{z} = x - iy.$$

**Remarques :**

- $\Re(\bar{z}) = \Re(z)$  et  $\Im(\bar{z}) = -\Im(z)$
- Géométriquement cela correspond à faire une symétrie par rapport à l'axe des abscisses :

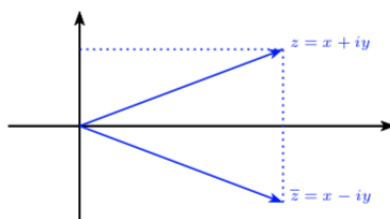


FIGURE 2 – Conjugué

**Proposition 7.** 1. La conjugaison est **involutive** :  $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{\overline{z}} = z$ .

2. La conjugaison est **linéaire** :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad \text{et} \quad \overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}.$$

3. La conjugaison passe au produit et au quotient

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'},$$

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, z' \neq 0 \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}.$$

**Proposition 8.** Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  on a

$$\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$$

$$\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$$

⚠ Ne pas oublier la division par  $i$  dans la partie imaginaire.

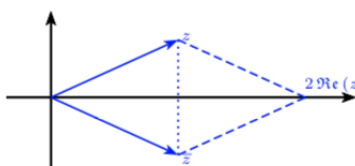


FIGURE 3 – Interpretation graphique  $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$

**Proposition 9.**

$$(z \in \mathbb{R}) \iff (z = \overline{z})$$

$$(z \in i\mathbb{R}) \iff (z = -\overline{z})$$

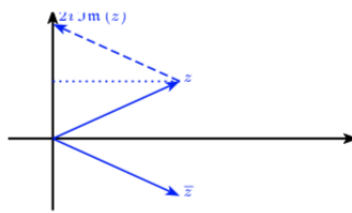


FIGURE 4 – Interpretation graphique  $\Im \mathbf{m}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

## II Forme trigonométrique

### II. 1 Module d'un nombre complexe

**Définition 10.** Pour tout nombre complexe  $z = x + iy$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on définit le module de  $z$  par :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

**Remarques :**

- Sur  $\mathbb{R}$  le module et valeur absolue coïncident, ce pourquoi on utilise la même notation.
- $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| \geq 0$ , de plus  $|z| = 0$  si et seulement si  $z = 0$ .
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}^2$ ,  $|z - z'| = 0$  si et seulement si  $z = z'$ .
- Le module correspond à la norme du vecteur définie par le point d'affixe  $z$ .  $|z - z'|$  désigne la distance entre les points d'affixes  $z$  et  $z'$ .

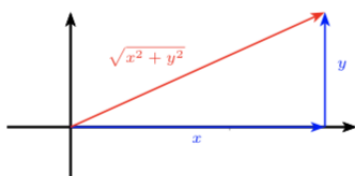


FIGURE 5 – Interpretation graphique du module

**Proposition 11.**  $\forall z, z' \in \mathbb{C}^2$ ,  $|zz'| = |z||z'|$  et pour  $z' \neq 0$  :  $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$

**Proposition 12.** Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$z\bar{z} = |z|^2 \quad \text{et} \quad |\bar{z}| = |z|.$$

IL n'y a pas d'ordre sur  $\mathbb{C}$  (qui généralise l'ordre sur  $\mathbb{R}$  et qui est compatible avec les opérations de base). Pour obtenir des inégalités on doit être sur  $\mathbb{R}$

**Proposition 13.** Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$|\Re(z)| \leq |z| \quad \text{et} \quad |\Im(z)| \leq |z|.$$

**Proposition 14.** 1. (Inégalité triangulaire sur  $\mathbb{C}$ .)

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

L'égalité a lieu si et seulement si il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tel que  $z = \lambda z'$  ou si  $z' = 0$ .

2. Soit  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ , on a :

$$||z| - |z'|| \leq |z - z'|$$

## II. 2 Cercle trigonométrique

**Définition 15.** Le *cercle trigonométrique* est le cercle du plan de rayon 1 et de centre  $(0, 0)$ .

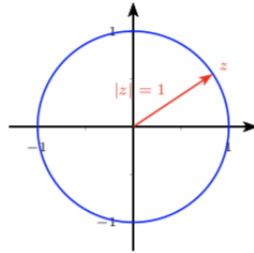


FIGURE 6 – Cercle trigonométrique.

**Proposition 16.** Dans  $\mathbb{R}^2$  le cercle trigonométrique peut se paramétrer de la manière suivante :

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Avec les nombres complexes il peut se paramétrer de la manière suivante :

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

## II. 3 Argument d'un nombre complexe

**Définition 17.** Pour un point du cercle trigonométrique on définit son *argument* par la longueur algébrique de l'arc entre le point  $1 + 0i$  et le point  $z$ . Le sens positif est choisi de tel sorte que l'argument de  $i$  est égal à  $\frac{\pi}{2}$ .

Cette unité est le *radian*.

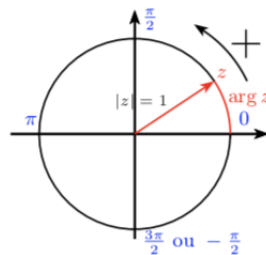


FIGURE 7 – Cercle trigonométrique orienté.

**Définition 18.** Pour nombre complexe non nul  $z \in \mathbb{C}$ , on définit son argument comme l'argument de  $\frac{z}{|z|}$ .

**Remarques :**

- L'argument n'est pas défini pour 0.
- L'argument n'est défini qu'à  $2\pi$  près. On appelle *argument principal* l'unique argument dans  $] -\pi, \pi]$ , on le note  $\arg(z)$
- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont le même module et le même argument principal (ou si ils sont nuls tous les deux).

**Proposition 19.** Pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  on a

1.  $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \quad [2\pi]$
2.  $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$
3.  $\arg(\lambda z) = \arg(z)$
4.  $\arg(z) = \arg(z') \quad [2\pi]$  si et seulement si  $\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+^*$
5.  $\arg(z) = \arg(z') \quad [\pi]$  si et seulement si  $\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}^*$

**Exercice 1.** Exprimer  $\arg\left(\frac{1}{z}\right)$  en fonction de  $\arg(z)$

Interprétation géométrique : Soit  $A$  et  $B$  deux points du plan d'affixes respectives  $z_A$  et  $z_B$ . On a

$$\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \arg(z_B) - \arg(z_A) = \text{l'angle } OAOB$$

## II. 4 Forme trigonométrique

**Théorème 20.** Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ , alors  $z$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$z = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta)),$$

avec  $\rho > 0$  et  $\theta \in ] -\pi, \pi]$ .

Cette écriture est appelée forme trigonométrique de  $z$ .

*Démonstration.*  $\frac{z}{|z|} \in U$ , on pose  $\theta = \arg(z) = \arg\left(\frac{z}{|z|}\right)$ , on a  $\cos(\theta) = \Re\left(\frac{z}{|z|}\right)$  et  $\sin(\theta) = \Im\left(\frac{z}{|z|}\right)$ .  
Ainsi

$$z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

□

**Exemple :** Mettre  $z = -3 + \sqrt{3}i$  sous forme trigonométrique.



### III Forme Exponentielle

#### III. 1 Exponentielle complexe

**Définition 21.** Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  on note

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

**Remarques :**

- $e^{i\theta}$  est le point du cercle trigonométrique d'argument  $\theta$ .

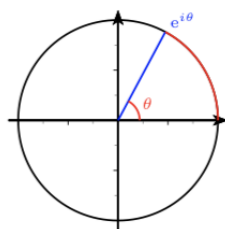


FIGURE 8 – Représentation de  $e^{i\theta}$ .

**Exemples :**

$$e^{i0} = 1 \quad e^{i\pi} = -1 \quad e^{i\pi/2} = i.$$

**Proposition 22.** 1.  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, e^{i\theta+2k\pi} = e^{i\theta}$

2.  $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}^2, e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$

3.  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$

4.  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

5.  $\forall \theta \in \mathbb{R}, |e^{i\theta}| = 1$

6.  $U = \{e^{i\theta} | \theta \in \mathbb{R}\} = \{e^{i\theta} | \theta \in ]-\pi, \pi]\}$

*Démonstration.* (2) □

**Définition 23.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$  on pose :

$$e^{\lambda+i\theta} = e^\lambda e^{i\theta}.$$

**Remarques :**

- On aurait pu dire  $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$  on pose

$$e^z = e^x e^{iy}.$$

**Proposition 24.** Pour tout  $z, z' \in \mathbb{C}$  on a

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'} \quad \text{et} \quad \frac{1}{e^z} = e^{-z}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$(e^z)^n = e^{zn}.$$

### III. 2 *Forme exponentielle*

**Théorème 25.** Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ ,  $z$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$z = \rho e^{i\theta}$$

avec  $\rho > 0$  et  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ . Cette écriture s'appelle la forme exponentielle de  $z$ .

**Remarques :**

- Soit  $z = \rho e^{i\theta}$  sous forme trigonométrique. On a alors

$$\rho = |z| \quad \text{et} \quad \theta = \arg(z).$$

- Multiplier par un nombre de la forme  $\rho e^{i\theta}$  revient géométriquement à faire une rotation d'angle  $\theta$  et une homothétie de rapport  $\rho$ .

**Proposition 26.** Pour tout  $z, z' \in \mathbb{C}^*$  :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$$

## IV Application des nombres complexes

### IV. 1 Polynôme de degré 2

Les nombres complexes permettent de résoudre toutes les équations polynomiales du second degré.

**Théorème 27.** Soit  $P(z) = az^2 + bz + c$  un polynôme de degré 2 (ie  $a \neq 0$ ) à coefficients réels.  $P$  possède 2 racines (avec multiplicité) dans  $\mathbb{C}$ . Plus précisément on a la trichotomie suivante, selon le signe du discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$  :

— Si  $\underline{\Delta > 0}$  Alors  $P$  admet deux racines réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

— Si  $\underline{\Delta = 0}$  Alors  $P$  admet une racine réelle (double)

$$r = \frac{-b}{2a}$$

— Si  $\underline{\Delta < 0}$  Alors  $P$  admet deux racines complexes distinctes :

$$r_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

**Théorème 28.** Soit  $P(x) = ax^2 + bx + c$  un polynôme de degré 2. Soit  $r_1, r_2$  ses racines (possiblement  $r_1 = r_2$ ) . On a alors :

$$P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

En particulier,  $r_1 r_2 = \frac{c}{a}$  et  $r_1 + r_2 = \frac{-b}{a}$

Ces résultats se généralisent doublement :

- Aux polynômes à coefficients complexes.
- Aux polynômes de degré quelconque.

Le théorème suivant est une des bases de l'algèbre moderne :

**Théorème 29** (D'alembert Gauss). Soit  $P$  un polynôme de degré  $n$  à coefficients complexes. Alors  $P$  admet exactement  $n$  racines dans  $\mathbb{C}$  (à multiplicité près).

En particulier, tout polynôme non constant admet au moins une racine dans  $\mathbb{C}$ .

Dans le cours de BCPST, on s'intéressera à une petite généralisation, à savoir la résolution des équations polynomiales du type :

$$z^2 = a$$

avec  $a \in \mathcal{B}$ .

La notion de racine n'est pas bien définie dans  $\mathbb{C}$  car il n'y a pas de relation d'ordre. Dans  $\mathbb{R}$  on a choisi, par convention de prendre la racine positive, mais il n'est pas possible de faire un tel choix dans  $\mathbb{C}$ . Ainsi on ne notera jamais racine ( $z$ ) avec le symbole racine.

Comment faire alors pour résoudre  $z^2 = a$ ? L'idée est de mettre  $a$  sous forme exponentielle puis de 'deviner' les solutions.

**Théorème 30.** Soit  $a$  un nombre complexe non nul, et  $\rho \in \mathbb{R}_+, \theta \in \mathbb{R}$  tel que  $a = \rho e^{i\theta}$ . L'équation  $z^2 = a$  admet alors deux solutions :

$$z_1 = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta+2\pi}{2}}$$

**Exemples** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

- $z^2 = 1 + i$
- $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$
- $z^2 = \frac{2+2i}{1-i}$

## IV. 2 Trigonométrie

**Proposition 31.**  $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$\cos(\theta) = \Re(e^{i\theta}) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \Im(e^{i\theta}).$$

**Proposition 32** (Formule d'Euler).  $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

 Ne pas oublier le  $i$  au dénominateur

**Angle moitié**  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left( e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$$

**Exercice 2.** Pour  $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$  simplifier l'expression  $\frac{1-e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$

**Proposition 33** (Formule de Moivre). Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ , et  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

**Linéarisation** La formule de Moivre permet de *linéariser* les formules avec sin et cos, c'est-à-dire passer de  $\cos^p(\theta) \sin^q(\theta)$  à une somme contenant que des termes de la forme  $\cos(n\theta)$  et  $\sin(n\theta)$ .

- On utilise la formule d'Euler :

$$\cos^p(\theta) \sin^q(\theta) = \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^p \left( \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^q .$$

- On développe avec la formule du binôme de Newton.
- On rassemble les termes de même exposant pour retrouver des sin et cos.

**Exercice 3.** Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , linéariser  $\sin^5(\theta)$ . Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , linéariser  $\sin^2(\theta) \cos^3(\theta)$ .

**Délinéarisation** Si on cherche à faire l'opération inverse, passer d'une formule avec des somme de  $\sin(n\theta)$  et  $\cos(n\theta)$  a des produits. (C'est plus rare de vouloir faire ça)

### IV. 3 Suite récurrente linéaire d'ordre 2

## V Racine $n$ -eme de l'unité (Hors Programme)

Hors programme mais tellement classique.

**Définition 34.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On appelle racine  $n$ -ième de l'unité, tout nombre complexe  $z \in \mathbb{C}$  tel que

$$z^n = 1.$$

### Exemples

1. Les racines secondes de 1 sont les nombres  $z = 1$  et  $z = -1$ .
2. Les racines troisièmes de 1 sont les nombres  $z = 1$  et  $z = j$  et  $z = j^2$ .

**Théorème 35.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il y a exactement  $n$  racines  $n$ -ièmes de l'unité. Elles sont données par

$$U_n = \{\xi_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}.$$

*Démonstration.*

□

**Exercice 4.** Pour tout  $n \geq 2$ , pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on pose  $\xi_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k = 0 \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n-1} \xi_k = (-1)^{n-1}.$$