Correction TD7 : Systèmes linéaires

I Systèmes linéaires sans paramètre

Correction 1.

1. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ 4x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -y & + & 3x & + & z & = & 5 \\ y & + & 2x & - & z & = & 1 \\ -y & + & x & + & z & = & 2 \\ y & + & 4x & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -y & + & 3x & + & z & = & 5 & \\ & & 5x & & & = & 6 & \mathbf{L_2 \leftarrow L_1 + L_2} \\ & - & 2x & & & = & -3 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \\ & & 7x & + & 2z & = & 8 & \mathbf{L_4 \leftarrow L_4 + L_1} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -y & + & 3x & + & z & = & 5 & \\ & & 5x & & & = & 6 & \\ & & & & 0 & = & -3 & \mathbf{L_3 \leftarrow 5L_3 + 2L_2} \\ & & 7x & + & 2z & = & 8 & \end{array}\right.$$

Le système est échelonné de rang 3. La troisième équation est impossible, donc le système est incompatible : $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$

2. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & 2t & = & 6 \\ 2x & - & y & - & 2z & - & 3t & = & 8 \\ 3x & + & 2y & - & z & + & 2t & = & 4 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & + & t & = & -8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & 2y & + & 3z & - & 2t & = & 6 & \\ & - & 5y & - & 8z & + & t & = & -4 & \mathbf{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \\ & - & 4y & - & 10z & + & 8t & = & -14 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \\ & - & 7y & - & 4z & + & 5t & = & -20 & \mathbf{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2t & + & 2y & + & 3z & = & 6 \\ & & t & - & 5y & - & 8z & = & -4 \\ & & 8t & - & 4y & - & 10z & = & -14 \\ & & 5t & - & 7y & - & 4z & = & -20 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & - & 2t & + & 2y & + & 3z & = & 6 & \\ & & t & - & 5y & - & 8z & = & -4 & \\ & & & & 36y & + & 54z & = & 18 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2} \\ & & & & 18y & + & 36z & = & 0 & \mathbf{L_4 \leftarrow L_4 - 5L_2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & - & 2t & + & 2y & + & 3z & = & 6 & \\ & & t & - & 5y & - & 8z & = & -4 & \\ & & & & 36y & + & 54z & = & 18 & \\ & & & & & & 18z & = & -18 & \mathbf{L_4 \leftarrow 2L_4 - L_3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1 \\ t & = & -2 \\ y & = & 2 \\ z & = & -1 \end{array}\right.$$

Le rang est 4. L'ensemble des solutions est donné par $\boxed{\mathcal{S} = \{(1, 2, -2, -1)\}}$. C'est un point de $\mathbb{R}^4$.

3. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 2 \\ 4x & - & y & - & z & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} y & + & z & + & 2x & = & 1 \\ -y & - & z & + & x & = & 2 \\ -y & - & z & + & 4x & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} y & + & z & + & 2x & = & 1 & \\ & & & & 3x & = & 3 & \mathbf{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \\ & & & & 6x & = & 4 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} y & + & z & + & 2x & = & 1 & \\ & & & & 3x & = & 3 & \\ & & & & 0 & = & -2 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \end{array}\right.$$

Le système est échelonné de rang 2 et $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$.

4. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & t & = & 1 \\ x & - & y & - & z & + & t & = & 2 \\ x & - & y & - & z & - & t & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & y & + & z & - & t & = & 1 & \\ & - & 2y & - & 2z & + & 2t & = & 1 & \mathbf{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \\ & - & 2y & - & 2z & & & = & 2 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \end{array}\right.$$

Le système est échelonné, de rang 3. On choisit x, y, t comme variables principales, et on fait passer t au second membre :

$$(S_4) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & t & = & 1 - z \\ & - & 2y & + & 2t & = & 1 + 2z \\ & & y & & & = & -1 - z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & \dfrac{3}{2} \\ t & = & -\dfrac{1}{2} \\ y & = & -1 - z \end{array}\right.$$

On a donc : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{3}{2}, -1 - z, z, -\frac{1}{2}\right),\ z \in \mathbb{R}\right\}} = \left\{\left(\frac{3}{2}, -1, 0, -\frac{1}{2}\right) + z\,(0, -1, 1, 0)\,,\ z \in \mathbb{R}\right\}$. On obtient une droite de $\mathbb{R}^4$ passant par $\left(\frac{3}{2}, -1, 0, -\frac{1}{2}\right)$ et de vecteur directeur $(0, -1, 1, 0)$.

5. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & z & = & 5 \\ x & + & y & - & z & = & -2 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} z & - & y & + & 3x & = & 5 \\ -z & + & y & + & x & = & -2 \\ z & + & 2y & - & x & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} z & - & y & + & 3x & = & 5 & \\ & & & & 4x & = & 3 & \mathbf{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \\ & & 3y & - & 4x & = & -2 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \end{array}\right.$$

Le rang est échelonné et de rang 3. On obtient en remontant les équations : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{37}{12}\right)\right\}}$.

6. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & & & - & 4x_5 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & & & = & 0 & \\ & & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0 & \\ & - & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 6x_4 & - & 4x_5 & = & 0 & \mathbf{L_3 - 2L_1} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & & & = & 0 & \\ & & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0 & \\ & & & & & - & 12x_4 & + & 2x_5 & = & 0 & \mathbf{L_3 + 3L_2} \end{array}\right.$$

Le système est échelonné et le rang est 3. On choisit x_1, x_2, x_4 comme inconnues principales, et on passe x_3, x_5 au second membre. On obtient :

$$(S_6) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_4 & = & x_3 \\ & & x_2 & - & 2x_4 & = & -x_3 - 2x_5 \\ & & & & x_4 & = & \dfrac{x_5}{6} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccc} x_1 & = & 3x_3 + \dfrac{17}{6}x_5 \\ \\ x_2 & = & -x_3 - \dfrac{5}{3}x_5 \\ \\ x_3 & = & \dfrac{x_5}{6} \end{array}\right.$$

et $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\left(3x_3 + \dfrac{17}{6}x_5, -x_3 - \dfrac{5}{3}x_5, x_3, \dfrac{1}{6}x_5, x_5\right),\ (x_3, x_5) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.

7. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 3z & + & 2t & = & 1 \\ x & + & 3y & + & 3z & + & t & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{cccccccccl} x & + & 2y & + & 3z & + & 2t & = & 1 & \\ & & y & & & - & t & = & -1 & \mathbf{L_2} \leftarrow \mathbf{L_2} - \mathbf{L_1} \end{array}\right.$$

Le système est échelonné est le rang est 2 On choisit x et y comme variables principales, et on fait passer z, t au second membre. On obtient :

$$(S_7) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 3 - 3z - 4t \\ y & = & t - 1 \end{array}\right.$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{(3 - 3z - 4t, t - 1, z, t),\ (z, t) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.

8. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 5a & + & b & + & 2c & = & 13 \\ 4a & + & 2b & + & c & = & 11 \\ a & - & b & + & c & = & 2 \\ 3a & + & b & + & c & = & 8 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} b & + & 2c & + & 5a & = & 13 \\ 2b & + & c & + & 4a & = & 11 \\ -b & + & c & + & a = & 2 & \\ b & + & c & + & 3a & = & 8 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{cccccccl} b & + & 2c & + & 5a & = & 13 & \\ & - & 3c & - & 6a & = & -15 & \mathbf{L_2} \leftarrow \mathbf{L_2} - \mathbf{2L_1} \\ & & 3c & + & 6a & = & 15 & \mathbf{L_3} \leftarrow \mathbf{L_3} + \mathbf{L_1} \\ & - & c & - & 2a & = & -5 & \mathbf{L_4} \leftarrow \mathbf{L_4} - \mathbf{L_1} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} b & + & 2c & + & 5a & = & 13 \\ & & c & + & 2a & = & 5 \end{array}\right.$$

Le système est échelonné et le rang est 2. On choisit b et c comme inconnues principale, et on fait passer a au second membre. On obtient :

$$(S_8) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccc} b & = & 3 - a \\ c & = & 5 - 2a \end{array}\right.$$

Ainsi : $\boxed{\mathcal{S} = \{(a, 3 - a, 5 - 2a),\ a \in \mathbb{R}\}}$ $= \{(0, 3, 5) + a\,(1, -1, -2),\ a \in \mathbb{R}\}$. Cet ensemble est une droite de $\mathbb{R}^3$, passant par le point de coordonnées $(0, 3, 5)$ et de vecteur directeur $(1, -1, -2)$.

9. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} 3x & + & 2y & + & z & - & u & - & v & = & 0 \\ x & - & y & - & z & - & u & + & 2v & = & 0 \\ -x & + & 2y & + & 3z & + & u & - & v & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccccccccc} -x & + & 2y & + & 3z & + & u & - & v & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & z & - & u & - & v & = & 0 \\ x & - & y & - & z & - & u & + & 2v & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{cccccccccccl} -x & + & 2y & + & 3z & + & u & - & v & = & 0 & \\ & & 8y & + & 10z & + & 2u & - & 4v & = & 0 & \mathbf{L_2} + \mathbf{3L_1} \\ & & y & + & 2z & & & + & v & = & 0 & \mathbf{L_3} + \mathbf{L_1} \end{array}\right.$$

$$(S_9) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -x & + & 2y & + & 3z & + & u & - & v & = & 0\\ & & y & + & 2z & & & + & v & = & 0\\ & & 4y & + & 5z & + & u & - & 2v & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcll} -x & + & 2y & + & 3z & + & u & - & v & = & 0 & \\ & & y & + & 2z & & & + & v & = & 0 & \\ & & & - & 3z & + & u & - & 6v & = & 0 & \mathbf{L_3 - 4L_2} \end{array}\right.$$

Le système est échelonné et le rang est 3. On choisit x, y, z comme inconnues principales, et on met u, v au second membre. On obtient :

$$(S_9) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -v - \frac{1}{3}u\\ y & = & 3v - \frac{2}{3}u\\ z & = & \frac{u}{3} - 2v \end{array}\right.$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\left(-v - \frac{1}{3}u, 3v - \frac{2}{3}u, \frac{u}{3} - 2v, u, v\right),\ (u, v) \in \mathbb{R}^2\right\}}$

10. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & - & 4t & = & 4\\ & & y & - & z & + & t & = & -3\\ x & + & 3y & & & - & 3t & = & 1\\ x & + & 2y & + & z & - & 4t & = & 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & - & 2y & + & 3z & - & 4t & = & 4 & \\ & & y & - & z & + & t & = & -3 & \\ & & 5y & - & 3z & + & t & = & -3 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}\\ & & 4y & - & 2z & & & = & 0 & \mathbf{L_4 \leftarrow L_4 - L_1} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & - & 2y & + & 3z & - & 4t & = & 4 & \\ & & y & - & z & + & t & = & -3 & \\ & & 4y & - & 2z & & & = & 0 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}\\ & & 4y & - & 2z & & & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & - & 4t & = & 4\\ & & y & - & z & + & t & = & -3\\ & & 4y & - & 2z & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Le système est échelonné et le rang est 3. On choisit x, z, t comme inconnues principales, et on met y au second membre. On obtient :

$$(S_{10}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & -8\\ t & = & y - 3\\ z & = & 2y \end{array}\right.$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \{(-8, y, 2y, y - 3),\ y \in \mathbb{R}\}}$.

II Systèmes linéaires avec paramètre

Correction 2.

1. On met le système sous forme échelonné

$$(S_\lambda) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} (2-\lambda)x + 2y & = & 0\\ x + (3-\lambda)y & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x + (3-\lambda)y & = & 0\\ (2-\lambda)x + 2y & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x + (3-\lambda)y & = & 0\\ +2y - (3-\lambda)(2-\lambda)y & = & 0 \end{array}\right.$$

D'où

$$(S_\lambda) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x + (3-\lambda)y & = & 0\\ (-\lambda^2 + 5\lambda - 4)y & = & 0 \end{array}\right.$$

Le système n'est pas de Cramer si $(\lambda^2 + 5\lambda - 4) = 0$, soit

$$\boxed{\Sigma = \{1, 4\}}$$

2. — $\underline{\lambda = 1}$ On obtient $S_1 \iff x + 2y = 0$

$$\boxed{\mathcal{S}_1 = \{(-2y, y) | y \in \mathbb{R}\}}$$

— $\underline{\lambda = 4}$ On obtient $S_4 \iff x - y = 0$

$$\boxed{\mathcal{S}_4 = \{(x, x) | x \in \mathbb{R}\}}$$

3. Si λ n'est pas dans Σ, le système est de Cramer, il admet donc une unique solution. Comme $(0, 0)$ est solution, c'est la seule.

$$\boxed{\mathcal{S}_\lambda = \{(0, 0)\}}$$

Correction 3.

1. En échangeant les lignes et les colonnes on peut voir que le système est déjà échelonné !

$$(S_\lambda) \iff \left\{ \begin{array}{ccccc} (2-\lambda)x & +y & & = & 0 \\ & (1-\lambda)y & & = & 0 \\ -x & -y & +(1-\lambda)z & = & 0 \end{array} \right.$$

$L_3 \leftarrow L_1, L_2 \leftarrow_3, L_1 \leftarrow L_2$

$$(S_\lambda) \iff \left\{ \begin{array}{ccccc} -x & -y & +(1-\lambda)z & = & 0 \\ (2-\lambda)x & +y & & = & 0 \\ & (1-\lambda)y & & = & 0 \end{array} \right.$$

$C_3 \leftarrow C_1, C_2 \leftarrow C_3, C_1 \leftarrow C_2$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccc} (1-\lambda)z & -x & -y & = & 0 \\ & (2-\lambda)x & +y & = & 0 \\ & & (1-\lambda)y & = & 0 \end{array} \right.$$

2. Si $(2 - \lambda) \neq 0$ et $(1 - \lambda) \neq 0$ c'est-à-dire si $\lambda \notin \{1, 2\}$

$$\boxed{\text{Le système est triangulaire de rang 3.}}$$

Si $(2 - \lambda) = 0$, c'est-à-dire si $\lambda = 2$ on a :

$$S_2 \iff \left\{ \begin{array}{ccccc} -z & -x & -y & = & 0 \\ & & +y & = & 0 \\ & & -y & = & 0 \end{array} \right.$$

$$S_2 \iff \left\{ \begin{array}{ccccc} -z & -x & -y & = & 0 \\ & & +y & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{Le système est de rang 2.}}$$

Si $(1 - \lambda) = 0$, c'est-à-dire si $\lambda = 1$ on a :

$$S_1 \iff \left\{ \begin{array}{cccc} -x & -y & = & 0 \\ x & +y & = & 0 \\ & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$S_1 \iff \left\{ \begin{array}{cccc} -x & -y & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{Le système est de rang 1.}}$$

3. Le système n'est pas de Cramer, si $\lambda \in \{1, 2\}$.
   Si $\lambda = 1$ les solutions sont données par
   $$\boxed{S_1 = \{(-y, y, z) \,|(y, z) \in \mathbb{R}^2\}}$$
   Si $\lambda = 2$ les solutions sont données par
   $$\boxed{S_2 = \{(-z, 0, z) \,|z \in \mathbb{R}^2\}}$$
4. Si $\lambda \notin \Sigma$, le système est de Cramer, il admet une unique solution. Or il est homogène donc, $(0, 0, 0)$ est solution, c'est donc la seule :
   $$\boxed{S = \{(0, 0, 0)\}}$$

Correction 4. Discuter les solutions dans $\mathbb{R}$ des systèmes suivants en fonction des paramètres indiqués :

1. $\begin{cases} mx + y + z = X \\ x + my + z = Y \\ x + y + mz = Z \end{cases}$ $(m \in \mathbb{R})$

   On applique la méthode du pivot de Gauss, en faisant attention d'échanger les lignes pour avoir au maximum des pivots indépendants de m :

$$\mathcal{S} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + mz = Z \\ x + my + z = Y \\ mx + y + z = X \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + mz = Z \\ (m-1)y + (1-m)z = Y - Z & \mathbf{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \\ (1-m)y + (1-m^2)z = X - mZ & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - mL_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + mz = Z \\ (m-1)y + (1-m)z = Y - Z \\ (2-m-m^2)z = X - mZ + Y - Z & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \end{cases}$$

   On a un système échelonné. On fait des cas sur les pivots : $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$, et $2 - m - m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \notin \{1, -2\}$.

   - Si $m \neq 1$ et $m \neq -2$, alors le système est de rang 3, et on obtient, en remontant les équations :
     $$\boxed{\mathcal{S}_{m \notin \{1,-2\}} = \left\{ \left(\frac{Z + Y - (1+m)X}{(1-m)(2+m)}, \frac{Z - (1+m)Y + X}{(1-m)(2+m)}, \frac{X + Y - (m+1)Z}{(1-m)(2+m)} \right) \right\}.}$$
   - Si $m = 1$, on obtient le système suivant :
     $$\begin{cases} x + y + z = Z \\ \quad\quad + 0 = Y - Z \\ \quad\quad 0 = X + Y - 2Z \end{cases}$$
     Le système est de rang 1, et on a deux équations de compatibilité : $0 = Y - Z$ et $0 = X + Y - 2Z$.

$\star$ Si $X = Y = Z$, les deux équations sont vérifiées et on a

$$\boxed{\mathcal{S}_{m=1} = \left\{(-y-z+Z, y, z)\,,\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

$\star$ Si $X \neq Y$ ou $X \neq Z$, alors

$$\boxed{\mathcal{S}_{m=1} = \emptyset.}$$

- Si $m = -2$, on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 2z & = & Z \\ & & -3y & + & 3z & = & Y-Z \\ & & & & 0 & = & X+Y+Z \end{array}\right.$$

Le système est de rang 2, et on a une équation de compatibilité : $0 = X+Y+Z$.

$\star$ Si $X+Y+Z = 0$, on a :

$$\boxed{\mathcal{S}_{m=-2} = \left\{\left(z + \frac{Y+2Z}{3}, z + \frac{Z-Y}{3}, z\right),\ z \in \mathbb{R}\right\}}.$$

$\star$ Si $X+Y+Z \neq 0$, alors

$$\boxed{\mathcal{S}_{m=-2} = \emptyset.}$$

2. $\left\{\begin{array}{ccccc} (m+1)x & + & my & = & 2m \\ mx & + & (m+1)y & = & 1 \end{array}\right.$ $(m \in \mathbb{R})$

On résout ce système linéaire de deux équations à deux inconnues. Ici, tous les coefficients dépendent de m : on est obligés de faire des cas sur m dès le départ.

- Si $m \neq 1$, on peut prendre la première ligne comme ligne pivot, et on obtient :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccc} (m+1)x & + & my & = & 2m \\ mx & + & (m+1)y & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} (m+1)x & + & my & = & 2m & \\ & - & (2m+1)y & = & 2m^2-m-1 & \mathbf{(m+1)L_2 - mL_2} \end{array}\right.$$

Le système est échelonné. On refait des cas sur m pour que les pivots soient non nuls.

$\star$ Si $m \neq -\dfrac{1}{2}$: on obtient alors le système suivant, en remarquant que $2m^2-m-1 = (m-1)(2m+1)$:

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} (m+1)x & + & my & = & 2m \\ & & y & = & 1-m. \end{array}\right.$$

Ainsi, si $m \neq -1$ et si $m \neq -\dfrac{1}{2}$, le système est de rang 2 et est donc un système de Cramer, avec :

$$\boxed{\mathcal{S}_{m \notin \{-1, -\frac{1}{2}\}} = \{(m, 1-m)\}.}$$

$\star$ Si $m = -\dfrac{1}{2}$:
On obtient alors :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \frac{1}{2}x & - & \frac{1}{2}y & = & -1 \\ & & 0 & = & 0. \end{array}\right.$$

On obtient un système échelonné de deux inconnues et dont le rang est 1. Il admet ainsi une infinité de solutions. On choisit x comme inconnue principale et y comme inconnue secondaire et on obtient

$$\boxed{\mathcal{S}_{m=-\frac{1}{2}} = \{(-2+y, y),\ y \in \mathbb{R}\}.}$$

- Si $m=-1$, on obtient en remplaçant dans le système de départ :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} & - & y & = & -2 \\ -x & & & = & 1 \end{array}\right.$$

Ainsi, on a : $\boxed{\mathcal{S}_{m=1}=\{(-1,2)\}.}$

3. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & my & + & m^2z & = & 2m \\ mx & - & m^2y & + & mz & = & 2m \\ mx & + & y & - & m^2z & = & 1-m \end{array}\right. \quad (m\in\mathbb{R})$

On commence par résoudre le système en éliminant les cas où le pivot est nul.

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & my & + & m^2z & = & 2m \\ mx & - & m^2y & + & mz & = & 2m \\ mx & + & y & - & m^2z & = & 1-m \end{array}\right. \Leftrightarrow (S')\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & my & + & m^2z & = & 2m \\ & & & + & m(1-m^2)z & = & 2m(1-m) \\ & & (1+m^2)y & - & m^2(1+m)z & = & 1-m-2m^2. \end{array}\right.$$

On réecrit le système (S') en le mettant sous forme triangulaire et on obtient le système équivalent suivant

$$(S''):\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & my & + & m^2z & = & 2m \\ & & (1+m^2)y & - & m^2(1+m)z & = & 1-m-2m^2 \\ & & & & m(1-m^2)z & = & 2m(1-m). \end{array}\right.$$

- Si $m\neq -1$, $m\neq 0$ et $m\neq 1$, on obtient un système de Cramer (de rang 3) que l'on résout en remontant les calculs et on obtient :

$$\boxed{\mathcal{S}_{m\notin\{-1,0,1\}}=\left\{\left(\frac{m(m^2+3)}{(1+m)(1+m^2)},\frac{1-m}{1+m^2},\frac{2}{1+m}\right)\right\}.}$$

- Si $m=-1$r, on reprend le système (S'') (on reprend au niveau où on a dû faire l'hypothèse de non égalité) et on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & -2 \\ & & 2y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & -4. \end{array}\right.$$

La dernière équation n'a pas de solution, donc on a : $\boxed{\mathcal{S}_{m=-1}=\emptyset.}$

- Si $m=0$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & & & = & 0 \\ & & y & & & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0. \end{array}\right.$$

Le système est de rang 2, et a pour solutions : $\boxed{\mathcal{S}_{m=0}=\{(0,1,z),\ z\in\mathbb{R}\}.}$

- Si $m=1$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 2 \\ & & 2y & - & 2z & = & -2 \\ & & & & 0 & = & 0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 2-z-1+z \\ y & = & -1+z \end{array}\right.$$

Le système est de rang 2, et a pour solutions : $\boxed{S_{m=1}=\{(1,-1+z,z),\ z\in\mathbb{R}\}.}$

4. $\left\{\begin{array}{rcrcl} (m-1)x & - & my & = & m \\ (m+1)x & + & (m+1)y & = & m^2-1 \end{array}\right. \quad (m \in \mathbb{R})$

Je ne donne ici que le résultat :

- Si $m \neq -1$ et $m \neq \dfrac{1}{2}$, alors $\boxed{\mathcal{S}_{m \notin \{-1, \frac{1}{2}\}} = \left\{\left(\dfrac{m^2}{2m-1}, \dfrac{m^2-3m+1}{2m-1}\right)\right\}.}$
- Si $\mathbf{m} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$, alors $\boxed{\mathcal{S}_{m=\frac{1}{2}} = \emptyset.}$
- Si $\mathbf{m} = -\mathbf{1}$, alors $\boxed{\mathcal{S}_{m=-1} = \{(x, -1+2x),\ x \in \mathbb{R}\}.}$

5. $\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & my & = & m^2 \\ mx & + & y & = & m^2 \end{array}\right. \quad (m \in \mathbb{R})$

Je ne donne ici que le résultat :

- Si $m \neq 1$ et $\mathbf{m} \neq -\mathbf{1}$, le système est alors un système de Cramer et $\boxed{\mathcal{S}_{m \notin \{1, -1\}} = \left\{\left(\dfrac{m^2}{1+m}, \dfrac{m^2}{1+m}\right)\right\}.}$
- Si $m = 1$, alors $\boxed{\mathcal{S}_{m=1} = \{(x, 1-x),\ x \in \mathbb{R}\}.}$
- Si $m = -1$, alors $\boxed{\mathcal{S}_{m=-1} = \emptyset.}$

6. $\left\{\begin{array}{rcrcl} y & + & z & = & rx \\ x & + & z & = & ry \\ x & + & y & = & rz \end{array}\right. \quad (r \in \mathbb{R})$

Attention qu'ici, il faut absolument repasser les x, y, z à gauche du système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} y & + & z & = & rx \\ x & + & z & = & ry \\ x & + & y & = & rz \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -rx & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & ry & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & rz & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & rz & = & 0 \\ x & - & ry & + & z & = & 0 \\ -rx & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & y & - & rz & = & 0 & \\ & & (-r-1)y & + & (1+r)z & = & 0 & \mathbf{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \\ & & (1+r)y & + & (1-r^2)z & = & 0 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 + rL_1} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & rz & + & y & = & 0 \\ & & (1+r)z & + & (-r-1)y & = & 0 \\ & & (1-r^2)z & + & (1+r)y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & - & rz & + & y & = & 0 & \\ & & (1+r)z & + & (-r-1)y & = & 0 & \\ & & & & (-r^2+r+2)y & = & 0 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - (1-r)rL_2} \end{array}\right.$$

On fait des cas sur r :

- Si $r \neq -1$ et $r \neq 2$, alors on a un système de rang 3, qui a donc une unique solution. Or le système est homogène, donc : $\boxed{\mathcal{S}_{r \notin \{-1,2\}} = \{(0,0,0)\}.}$
- Si $r = 2$, alors on obtient :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & 2z & + & y & = & 0 \\ & & 3z & - & 3y & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

Le système est de rang 2, et les solutions sont données par : $\boxed{\mathcal{S}_{r=2} = \{(z,z,z),\ z \in \mathbb{R}\}.}$

- Si $r = -1$, alors on obtient :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccccl} x & - & z & + & y & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - (1-r)rL_2} \end{array} \right.$$

Le système est de rang 1 et les solutions sont données par : $\boxed{\mathcal{S}_{r=-1} = \{(-y-z,y,z),\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}.}$

III Divers

Correction 5. Soit la fonction f définie par :

$$\mathbf{f} : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (3x+2y, 5x+3y). \end{array} \right.$$

Montrer que pour tout $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) = (X,Y)$ et donner l'expression de x et y en fonction de X et Y.

Soit $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ fixé. On cherche s'il existe un unique couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) = (X,Y)$. On résout ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 3x & + & 2y & = & X \\ 5x & + & 3y & = & Y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccl} 3x & + & 2y & = & X & \\ & & y & = & 5X-3Y & \mathbf{5L_1 - 3L_2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & -3X+2Y \\ y & = & 5X-3Y. \end{array} \right.$$

Ainsi, on a montré que pour tout $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ il existe un unique $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(X,Y) = f(x,y)$: f est donc bijective. De plus, on a $f(x,y) = (X,Y) \Leftrightarrow (x,y) = (-3X+2Y, 5X-3Y)$ donc la bijection réciproque est donnée par :

$$\boxed{f^{-1} : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (X,Y) & \mapsto & (-3X+2Y, 5X-3Y). \end{array} \right.}$$

Correction 6. Équilibrer la réaction chimique suivante :

$$\mathbf{H_2SO_3 + HBrO_3 \to H_2SO_4 + Br_2 + H_2O}.$$

On note x le nombre de molécules de H_2SO_3, y celui de $HBrO_3$, z celui de H_2SO_4, t celui de Br_2 et u celui de H_2O. Afin d'équilibrer la réaction chimique suivante, on doit résoudre le système linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x & & & - & z & & & & & = & 0 \\ 2x & + & y & - & 2z & - & 2u & & & = & 0 \\ 3x & + & 3y & - & 4z & - & u & & & = & 0 \\ & & y & & & & & - & 2t & = & 0. \end{array} \right.$$

On peut mettre ce système sous la forme échelonnée suivante

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ -z - u + 3y = 0 \\ -2u + y = 0 \\ y - 2t = 0. \end{cases}$$

C'est un système échelonné de rang 4 avec 5 inconnues, il y a donc une infinité de solutions. Les inconnues principales sont ici $x,\ y,\ z,\ u$ et l'inconnue secondaire est t. En résolvant ce système de bas en haut, on obtient la solution suivante

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(5t, 2t, 5t, t, t),\ t \in \mathbb{R}\}.}$$

En prenant par exemple $t = 1$ et en remettant dans la réaction chimique, on trouve la réaction chimique équilibrée suivante

$$\boxed{5H_2SO_3 + 2HBrO_3 \to 5H_2SO_4 + Br_2 + H_20.}$$

Correction 7. La somme des carrés.

1. **Trouver un polynôme de degré 3 tel que $\mathbf{P(X+1) - P(X) = X^2}$:**
   Un polynôme de degré 3 s'écrit sous la forme générale suivante :

$$P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

   avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Déterminons les coefficients $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ pour que P vérifie la condition voulue :

$$\begin{aligned} P(X+1) - P(X) = X^2 &\Leftrightarrow a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d - aX^3 - bX^2 - cX - d = X^2 \\ &\Leftrightarrow 3aX^2 + 3aX + a + 2bX + b + c = X^2. \end{aligned}$$

   En identifiant les coefficients, on obtient le système linéaire suivant, que l'on peut mettre directement sous la forme échelonnée suivante :

$$\begin{cases} c + b + a = 0 \\ 2b + 3a = 0 \\ 3a = 1. \end{cases}$$

   La résolution donne : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, d\right),\ d \in \mathbb{R}\right\}}$. Il n'y a aucune condition sur d, on peut par exemple prendre $d = 0$. Ainsi, le polynôme suivant convient

$$\boxed{P(X) = \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X.}$$

2. **Retrouver alors l'expression de $\mathbf{S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2}$:**
   Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. On calcule S_n en utilisant le polynôme P trouvé à la question précédente et en prenant

$X = k$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} P(k+1) - \sum_{k=1}^{n} P(k) \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} P(k) - \sum_{k=1}^{n} P(k) \\ &= P(n+1) - P(1) \\ &= \frac{2(n+1)^3 - 3(n+1)^2 + (n+1) - 2 + 3 - 1}{6} \\ &= \frac{n+1}{6}\left(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 3 + 1\right) \\ &= \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}. \end{aligned}$$

On retrouve bien la formule connue.

Correction 8. On considère les points $A = (1, 2, -1)$ et $B = (-2, 4, 0)$.

1. **Déterminer une représentation paramétrique et une représentation cartésienne de (AB).**
   La droite (AB) passe par le point $A = (1, 2, -1)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}(-3, 2, 1)$.
   On en déduit une équation paramétrique de (AB) :

$$\begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Trouvons une équation cartésienne de (AB) :
   Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On résout :

$$\begin{cases} 1 - 3\lambda = x \\ 2 + 2\lambda = y \\ -1 + \lambda = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = z + 1 \\ 2\lambda = y - 2 \\ -3\lambda = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = z + 1 \\ 0 = y - 2z - 4 \\ 0 = x + 3z + 2 \end{cases}$$

   On en déduit :

$$M \in (AB) \iff \left(\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \right) \iff \begin{cases} y - 2z - 4 = 0 \\ x + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

   Donc (AB) a pour équation cartésienne :

$$\begin{cases} y - 2z - 4 = 0 \\ x + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

2. **En fonction de $m \in \mathbb{R}$, déterminer l'intersection de (AB) avec la droite $\mathcal{D}_m$.**
   Première remarque : $\overrightarrow{AB}(-3, 2, 1)$ est un vecteur directeur de (AB), et $\vec{u}(1, -2, 2)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_m$ (quel que soit le réel m).
   Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc (AB) et $\mathcal{D}_m$ ne sont pas parallèles. On en déduit :
   • soit (AB) et $\mathcal{D}_m$ sont sécantes, et leur intersection sera réduite à un point ;
   • soit (AB) et $\mathcal{D}_m$ sont non coplanaires, et leur intersection sera vide.
   Lorsque m varie, la direction de la droite $\mathcal{D}_m$ ne change pas, mais cette droite "glisse" le long de l'axe (Oz), puisqu'elle passe par le point $E_m(3, 2, m)$.
   Comme l'axe (Oz) n'est pas parallèle à (AB), on s'attend à ce que, pour une valeur de m donnée, la droite $\mathcal{D}_m$ coupe (AB), et que pour toutes les autres, $\mathcal{D}_m$ et (AB) soient non coplanaires.

Passons à présent aux calculs :
Soit $m \in \mathbb{R}$. Pour trouver $\mathcal{D}_m \cap (AB)$, prenons un point de $\mathcal{D}_m$ et regardons à quelle condition il appartient à (AB).

Soit $M(x, y, z)$ un point de $\mathcal{D}_m$: $\exists s \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = s+3 \\ y = -2s+2 \\ z = 2s+m \end{cases}$. On résout :

$$M \in (AB) \iff \begin{cases} y - 2z - 4 = 0 \\ x + 3z + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2s + 2 - 2(2s+m) - 4 = 0 \\ s + 3 + 3(2s+m) + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -6s - 2m - 2 = 0 \\ 7s + 3m + 5 = 0 \end{cases}$$

On a donc :

$$M \in (AB) \Leftrightarrow \begin{cases} 3s + m = -1 \\ 7s + 3m = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3s + m = -1 \\ 2m = -8 \quad \mathbf{L_2 \leftarrow 3L_2 - 7L_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 1 \\ m = -4 \end{cases}$$

Conclusion :

• Si $m = -4$, alors $M \in (AB) \iff s = 1 \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases}$, donc l'unique point d'intersection de $\mathcal{D}_m$ avec (AB) est $M_0(4, 0, -2)$.
• Si $m \neq -4$, alors l'équation $M \in (AB)$ n'a pas de solution lorsque M est un point de $\mathcal{D}_m$, donc l'intersection de $\mathcal{D}_m$ avec (AB) est vide.