Correction TD - 8 : Etude de fonctions

I Ensemble de définition

Correction 1.

1. $f(x) = \sqrt{x^3}$: la fonction f est bien définie si et seulement si $x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ car la fonction racine cubique est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+}$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x - \frac{1}{x}}$. La fonction f est bien définie si et seulement si : $x \neq 0$ et $x - \dfrac{1}{x} \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$. Ainsi, on obtient : $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}}$.
3. $f(x) = \sqrt{x-3} + \dfrac{\sqrt{5+x}}{x}$. La fonction f est bien définie si et seulement si $x - 3 \geq 0$, $5 + x \geq 0$ et $x \neq 0$. Ainsi, on obtient : $\boxed{\mathcal{D}_f = [3, +\infty[}$.
4. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$. La fonction f est bien définie si $\dfrac{e^x+1}{e^x-1} > 0$ et $e^x - 1 \neq 0$. Comme le numérateur est strictement positif comme somme de deux termes strictement positifs, on a : $\dfrac{e^x+1}{e^x-1} > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}}$.
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right)$. La fonction f est bien définie si $\dfrac{2-x}{x+4} > 0$ et $x + 4 \neq 0$ (faire un tableau de signe). Donc $\boxed{\mathcal{D}_f =]-4, 2[}$.

Correction 2. La fonction f est bien définie si et seulement si $x^2 - (m+1)x + m \geq 0$. Le discriminant donne : $\Delta = (m+1)^2 - 4m = (m-1)^2$.

- Cas 1 : si $m = 1$: On obtient alors $\Delta = 0$ et ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2 - (m+1)x + m \geq 0$. Ainsi : $\boxed{\mathcal{D}_{m=1} = \mathbb{R}}$.
- Cas 2 : si $m \neq 1$: On obtient alors $\Delta > 0$ et les deux racines distinctes sont alors : $\dfrac{m+1+|m-1|}{2}$ et $\dfrac{m+1-|m-1|}{2}$. Afin de calculer la valeur absolue, on doit encore distinguer deux cas :
  - ⋆ Si $m > 1$: les deux racines sont alors 1 et m et on obtient ainsi : $\boxed{\mathcal{D}_{m>1} =]-\infty, 1] \cup [m, +\infty[}$.
  - ⋆ Si $m < 1$: les deux racines sont alors m et 1 et on obtient ainsi : $\boxed{\mathcal{D}_{m<1} =]-\infty, m] \cup [1, +\infty[}$.

Correction 3.

1. - Étude de $f \circ g$:
     - ⋆ Domaine de définition : La fonction $f \circ g$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathcal{D}_g$ et $g(x) \in \mathcal{D}_f$. Comme $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, la fonction $f \circ g$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathcal{D}_g$, à savoir si et seulement si $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$. Ainsi on obtient : $\boxed{\mathcal{D}_{f \circ g} = [3, +\infty[}$.
     - ⋆ Expression : Pour tout $x \geq 3$, on a : $f \circ g(x) = f[g(x)] = 2(g(x))^2 - (g(x)) + 1 = 8(x-3) - 2\sqrt{x-3} + 1 = 8x - 23 - 2\sqrt{x-3}$.
   - Étude de $g \circ f$:

- ⋆ Domaine de définition : La fonction $g \circ f$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathcal{D}_f$ et $f(x) \in \mathcal{D}_g$. Comme $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, la fonction $g \circ f$ est bien définie si et seulement si $f(x) \in \mathcal{D}_g$, à savoir si et seulement si $f(x) - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 2 \geq 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 17$ et les deux racines sont $\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$ et $\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$. Ainsi on obtient : $\boxed{\mathcal{D}_{g \circ f} = \left]-\infty, \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right[}$.
- ⋆ Expression : Pour tout $x \in \mathcal{D}_{g \circ f}$, on a : $g \circ f(x) = g[f(x)] = \sqrt{2x^2 - x - 2}$.

2. - Étude de $f \circ g$:
     - ⋆ Domaine de définition : La fonction $f \circ g$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathcal{D}_g$ et $g(x) \in \mathcal{D}_f$. Comme $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star = \mathcal{D}_g$, la fonction $f \circ g$ est bien définie si et seulement si $x \neq 0$ et $g(x) \neq 0$. On a : $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+1}{x} \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \neq 0$: toujours vrai. Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_{f \circ g} = \mathbb{R}^\star}$.
     - ⋆ Expression : Pour tout $x \neq 0$, on a : $f \circ g(x) = f[g(x)] = \dfrac{2(g(x))^2 - 8}{g(x)} = \dfrac{2\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 - 8}{\frac{x^2+1}{x}} = \dfrac{2(x^2+1)^2 - 8x^2}{x^2} \times \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{2x^4 - 4x^2 + 2}{x(x^2+1)}$.
   - Étude de $g \circ f$:
     - ⋆ Domaine de définition : La fonction $g \circ f$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathcal{D}_f$ et $f(x) \in \mathcal{D}_g$. Comme $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star = \mathcal{D}_g$, la fonction $f \circ g$ est bien définie si et seulement si $x \neq 0$ et $f(x) \neq 0$. On a : $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8 \neq 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$. Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}}$.
     - ⋆ Expression : Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, on a : $g \circ f(x) = g[f(x)] = f(x) + \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{2x^2 - 8}{x} + \dfrac{x}{2x^2 - 8} = \dfrac{4x^4 - 31x^2 + 64}{x(2x^2 - 8)}$.

Correction 4.

1. $f(x) = x \ln \sqrt{e^{\frac{x}{2}}} + \left(\sqrt{e^{2\ln(2x-1)}}\right)^3$: La fonction f est bien définie si et seulement si $\sqrt{e^{\frac{x}{2}}} > 0$, $e^{\frac{x}{2}} \geq 0$, $2x - 1 > 0$ et $e^{2\ln(2x-1)} \geq 0$. Comme toute exponentielle est strictement positive, la fonction f est bien définie si et seulement si $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$. Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_f =]\dfrac{1}{2}, +\infty[}$.

   Pour tout $x > \dfrac{1}{2}$, on a :
   $$f(x) = x \ln \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(e^{2\ln(2x-1)}\right)^{\frac{3}{2}} = x \ln\left(e^{\frac{x}{4}}\right) + \left(e^{\ln((2x-1)^2)}\right)^{\frac{3}{2}} = x \times \frac{x}{4} + ((2x-1)^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{x^2}{4} + (2x-1)^3$$

2. $g(x) = e^{\sqrt{\ln x}} + e^{(\ln x)^2}$. La fonction g est bien définie si et seulement si $x > 0$ et $\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_g = [1, +\infty[}$.

   On ne peux RIEN simplifier car $\sqrt{\ln x} = (\ln x)^{\frac{1}{2}} \neq \dfrac{1}{2} \ln(x)$... De même, on a : $(\ln x)^2 \neq \ln(x^2)$... et on ne peux rien faire avec $(\ln x)^2$.

II Calcul de dérivées

Correction 5.

1. Les calculs donnent $P^2 = X^4 + 6X^3 + 9X^2$, $P - Q = 2X - 1$, $P^2 - Q^2 = 4X^3 + 6X^2 - 2X - 1$.
2. On obtient $P(X+1) = X^2 + 5X + 4$.

3. $S \circ f : t \mapsto -\sin^2(t)$.

Correction 6.

1. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}}}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme composée et produit de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = e^{-\frac{1}{x}}(2x+1).}$
2. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}}}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est définie si et seulement si $x^2+1 \geq 0$ et $\sqrt{x^2+1} \neq 0$. Ainsi elle est bien définie si et seulement si $x^2+1 > 0$ ce qui est toujours vrai. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et quotient de fonctions dérivables et car $x^2+1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \dfrac{\cos x\sqrt{x^2+1} - \sin x \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \dfrac{(x^2+1)\cos x - x\sin x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.
3. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \sqrt{e^x}}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est définie si et seulement si $e^x \geq 0$: toujours vrai. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Ensemble de dérivabilité : Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x > 0$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x}}$.
4. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = e^{x\cos(x)}}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est toujours bien définie. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme produit et composée de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = [\cos(x) - x\sin(x)]\, e^{x\cos x}.}$
5. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = (1-x)e^{\sqrt{x-x^2}}}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x - x^2 \geq 0$. C'est un polynôme de deré 2 dont les racies sont 0 et 1. Donc $\mathcal{D}_f = [0,1]$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable si $x - x^2 > 0$. Ainsi la fonction f est dérivable sur $]0,1[$ comme somme, coposée et produti de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in]0,1[$, on a : $\boxed{f'(x) = \left[\dfrac{(1-x)(1-2x)}{2\sqrt{x-x^2}} - 1\right] e^{\sqrt{x-x^2}}.}$
6. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \dfrac{\sin^3(2x)}{2+\cos(5x)}}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $2+\cos(5x) \neq 0 \Leftrightarrow \cos(5x) \neq -2$: impossible car un cosinus est toujours compris entre -1 et 1. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme produit, composée, somme et quotient de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a :

     $$\boxed{f'(x) = \frac{\sin^2(2x)}{(2+\cos(x))^2}[12\cos(2x) + 6\cos(2x)\cos(5x) + 5\sin(2x)\sin(5x)].}$$
7. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \sin(\ln x)}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme composée de fonctions dérivables.

- Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}.}$

8. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \ln(e^x + x^2)}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est définie si et seulement si $e^x + x^2 > 0$: toujours vrai comme somme de deux nombres positifs dont l'un est strictement positif. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \dfrac{e^x + 2x}{e^x + x^2}$.

9. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \dfrac{x - e^x}{e^x + 1}}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $e^x + 1 \neq 0$: toujours vrai comme somme de deux termes tous les deux strictement positifs, une exponentielle étant toujours strictement positive. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme somme et quotient de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{1 - xe^x}{(e^x + 1)^2}.}$

10. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \ln\left(\dfrac{x + 2}{\sqrt{9x^2 - 4}}\right)}$:**
    - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $9x^2 - 4 > 0$ et $\dfrac{x+2}{\sqrt{9x^2 - 4}} > 0$. Comme une racine carrée est toujours positive, la fonction f est bien définie si et seulement si $9x^2 - 4 > 0$ et $x + 2 > 0$. La première condition est un polynôme de degré 2 dont les racines sont $-\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{2}{3}$. Donc $\mathcal{D}_f = \left]-2, -\dfrac{2}{3}\right[\cup \left]\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$.
    - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ (car ce qui est sous la racine est déjà strictement positif) comme produit, sommes, composées et quotient de fonctions dérivables.
    - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{-2(9x + 2)}{(x + 2)(9x^2 - 4)}.}$

11. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \dfrac{1}{(\cos(x))^4}}$:**
    - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $\cos^4(x) \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
    - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme composée et quotient de fonctions dérivables.
    - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{4\sin(x)}{(\cos(x))^5}.}$

12. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \dfrac{1}{2^{x+1}}}$:**
    - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $2^{x+1} \neq 0 \Leftrightarrow e^{(x+1)\ln 2} \neq 0$: toujours vrai car une exponentielle est toujours strictement positive. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
    - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme produit, composée et quotient de fonctions dérivables.
    - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{-\ln 2}{2^{x+1}}.}$ On peut pour cela remarquer que $f(x) = e^{-(x+1)\ln 2}$.

13. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = (e^{2x} - 1)^{\pi}}$:**
    - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $e^{2x} - 1 > 0$ car on a : $(e^{2x} - 1)^{\pi} = e^{\pi \ln(e^{2x} - 1)}$. Or $e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow x > 0$ par passage au logarithme népérien qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.

- Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme composée, somme et produit de focntions dérivables.
- Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \frac{2\pi e^{2x}}{e^{2x}-1}(e^{2x}-1)^{\pi}.}$

14. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2+3x}}{3^x}\right)^4}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x^2+3x \geq 0$ et $3^x = e^{x\ln 3} \neq 0$. La deuxième condition est toujours vérifiée car une exponentielle est toujours strictement positive. Pour la première condition, on reconnaît un polynôme de degré 2 dont les racines sont 0 et -3. Donc $\mathcal{D}_f =]-\infty, -3] \cup [0, +\infty[$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[$ car on doit avoir $x^2+3x > 0$ puis comme sommes, produit, composées et quotient de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \frac{2(x^2+3x)}{3^{4x}}\left[2x+3-2(x^2+3x)\ln 3\right].}$
15. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = 2^{\ln x}}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$ en écrivant que $2^{\ln x} = e^{\ln(x)\ln 2}$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme produit et composée de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \frac{\ln 2}{x}2^{\ln x}.}$
16. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$, $\ln x \geq 0$ et $x \neq 0$. La deuxième condition donne : $\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Donc $\mathcal{D}_f = [1, +\infty[$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ car on doit avoir $\ln x > 0$ comme composée et quotient de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \frac{1-2\ln x}{2x^2\sqrt{\ln x}}.}$
17. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \ln(\ln x)}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$ et $\ln(x) > 0$. Or on a : $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Donc $\mathcal{D}_f =]1, +\infty[$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme composée de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}.}$
18. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \ln(\sqrt{x^2-1}+x)}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $\sqrt{x^2-1}+x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} > -x$ et $x^2-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. On doit donc étudier deux cas afin de résoudre la première inéquation :
     - ⋆ Si $x \geq 1$, alors $-x \leq -1$ et l'inéquation est toujours vérifiée car une racine carrée est toujours supérieure à un nombre négatif.
     - ⋆ Si $x \leq -1$ alors $-x \geq 1$ et on peut donc passer au carrée tout en conservant l'équivalence, la fonction carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. On obtient alors : $\sqrt{x^2-1} > -x \Leftrightarrow x^2-1 > x^2 \Leftrightarrow -1 > 0$. Toujours faux.

     Donc $\mathcal{D}_f = [1, +\infty[$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ car on doit avoir en plus $x^2-1 > 0$ comme somme et composée de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.}$

19. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \dfrac{3^{x-1}\cos x}{x^x}}$:**

   - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$ et $x^x = e^{x\ln x} \neq 0$. La deuxième inéquation est toujours vérifiée, une exponentielle étant toujours strictement négative. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$ (on commence par écrire que : $\dfrac{3^{x-1}\cos x}{x^x} = \dfrac{\cos(x)e^{(x-1)\ln(3)}}{e^{x\ln x}}$).
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme produit, composées et quotient de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{e^{(x-1)\ln(3)}}{x^x}[-\sin(x) + \ln(3)\cos(x) - \cos(x)(\ln(x)+1)].}$

Correction 7.

1. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \dfrac{\ln(|x^2-1|)}{x}}$:**

   - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $|x^2-1| > 0$ et $x \neq 0$. Or une valeur absolue est toujours positive ou nulle donc on a : $|x^2-1| > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \notin \{-1, 1\}$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme somme, composée et quotient de fonctions dérivables (il y a une valeur absolue mais on a bien $x^2 - 1 \neq 0$ sur $\mathcal{D}_f$ donc le domaine de dérivabilité est bien égal au domaine de définition).
   - Dérivée : Comme il y a une valeur absolue, on étudie des cas afin d'enlever la valeur absolue. On a :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\lvert x^2-1\rvert$		x^2-1	0	$1-x^2$	0	x^2-1	
$f(x)$		$\dfrac{\ln(x^2-1)}{x}$	‖	$\dfrac{\ln(1-x^2)}{x}$	‖	$\dfrac{\ln(x^2-1)}{x}$	

   On obtient donc ainsi l'expression de f' en dérivant l'expression de f selon les cas :

   ⋆ Si $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$: on a alors $f'(x) = \dfrac{2x^2 - (x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)}$.

   ⋆ Si $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$: on a alors $f'(x) = \dfrac{2x^2 - (x^2-1)\ln(1-x^2)}{x^2(x^2-1)}$.

   On peut remarquer que l'on peut regrouper ces deux cas en une formule générale en utilisant de nouveau la valeur absolue et on obtient : $\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f'(x) = \dfrac{2x^2 - (x^2-1)\ln|x^2-1|}{x^2(x^2-1)}.}$

2. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{|e^x - 1| + 1}}}$:**

   - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $|e^x - 1| + 1 > 0$: toujours vrai comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif car $1 > 0$ et une valeur absolue est toujours positive ou nulle. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable si et seulement si $x \in \mathcal{D}_f$ et $e^x - 1 \neq 0$ (à cause de la présence de la valeur absolue). Or on a : $e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Ainsi la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ comme somme composée et quotient de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Comme il y a une valeur absolue, on étudie des cas afin d'enlever la valeur absolue. On a :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert e^x-1\rvert$		$1-e^x$	0	e^x-1	
$f(x)$		$\dfrac{x}{\sqrt{2-e^x}}$	$\Vert$	$\dfrac{x}{\sqrt{e^x}}$	

On obtient donc ainsi l'expression de f' en dérivant l'expression de f selon les cas :

- ⋆ $\boxed{\text{Si } x \in]-\infty, 0[\text{ : on a alors } f'(x) = \dfrac{4-2e^x+xe^x}{2(2-e^x)\sqrt{2-e^x}}.}$
- ⋆ $\boxed{\text{Si } x \in]0, +\infty[\text{ : on a alors } f'(x) = \dfrac{2-x}{2\sqrt{e^x}}.}$

Correction 8. Seule une étude des variations de la fonction assure que les bornes trouvées sont bien optimales.

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur $[0, +\infty[$.
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $1+x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$. Ainsi elle est en particulier bien définie sur $[0, +\infty[$.
   - Limites aux bornes : $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ par propriétés sur les somme et quotient de limite.
   - Dérivabilité : la fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ comme somme et quotient de fonctions dérivables. Et pour tout $x \geq 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$. Ainsi : $f'(x) < 0$ pour tout $x \geq 0$.
   - Tableau des variations :

x	0		$+\infty$
f	1	$\searrow$	0

   - Étude des extrema : la fonction f est décroissante sur $[0, +\infty[$, et $f(0) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc f est majorée et minorée sur $\mathbb{R}^+$. On obtient : $\sup_{[0,+\infty[} f = \max_{[0,+\infty[} f = 1$ et $\inf_{[0,+\infty[} f = 0$.
2. $f : x \mapsto \cos x + \sin x$ sur $\mathbb{R}$.
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
   - Étude de la périodicité :
     - ⋆ $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $x + 2\pi \in \mathcal{D}_f$.
     - ⋆ Soit $x \in \mathcal{D}_f$: $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) + \cos(x+2\pi) = \sin x + \cos x = f(x)$ en utilisant la 2π périodicité des fonctions sinus et cosinus.

     Ainsi la fonction f est 2π périodique. Ainsi on peut restreindre l'étude de la fonction f à tout intervalle d'amplitude 2π, par exemple : $[-\pi, \pi]$.
   - Dérivabilité : la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin x + \cos x$.
     On étudie alors le signe de f sur $[-\pi, \pi[$: on reconnaît une expression de la forme : $a\cos x + b\sin x$, on obtient donc : $f'(x) = \sqrt{2}(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
     Étude du signe : on a
     $$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

On peux alors faire un cercle trigonométrique et on voit alors que sur $[-\pi, \pi[$, on a : $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

- Tableau des variations :

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	-1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	-1

- Étude des extrema : on a f décroissante sur $\left[-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right]$ et croissante sur $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, donc f admet un minimum en $-\frac{3\pi}{4}$ qui vaut $-\sqrt{2}$. De même, f admet un minimum en $\frac{\pi}{4}$ qui vaut $\sqrt{2}$. La fonction f est donc bornée sur $[-\pi, \pi]$: elle est majorée par $\sqrt{2}$ et minorée par $-\sqrt{2}$. Comme ces deux nombres sont atteints, on obtient : $\sup_{\mathbb{R}} f = \max_{\mathbb{R}} f = \sqrt{2}$ et $\inf_{\mathbb{R}} f = \min_{\mathbb{R}} f = -\sqrt{2}$. On utilise ici aussi la 2π périodicité de f pour passer de l'intervalle $[-\pi, \pi[$ à $\mathbb{R}$ tout entier.

3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1 + \ln(x)}$ sur $[1, +\infty[$.
   - Domaine de définition : la fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$ et $1 + \ln x \neq 0$. On obtient ainsi : $1 + \ln x \neq 0 \Leftrightarrow \ln x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq e^{-1}$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $e^{-1} < 1$, la fonction f est donc en particulier bien définie sur $[1, +\infty[$.
   - Limites aux bornes : on a : $f(1) = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ par propriété sur les somme et quotient de limite.
   - Dérivabilité : la fonction f est dérivable sur son domaine de définition comme somme et quotient de fonctions dérivables. De plus, pour tout $x > 1$, on a en particulier : $f'(x) = \dfrac{-1}{x(1 + \ln x)^2}$. Comme on est sur $[1, +\infty[$, on a : $x > 0$. Ainsi comme un carré est toujours positif, on obtient : $f'(x) < 0$.
   - Tableau des variations :

x	1		$+\infty$
f	1	$\searrow$	0

   - Étude des extrema : La fonction f est ainsi majorée par 1 et minorée par 0. Comme $1 = f(1)$, 1 est atteint et ainsi c'est le maximum de f sur $[1, +\infty[$: $\sup_{[1,+\infty[} f = \max_{[1,+\infty[} f = 1$. Le nombre 0 n'est jamais atteint car c'est une limite et ainsi, on obtient 0 est la borne inférieure de f sur $[1, +\infty[$ mais il n'y a pas de minimum.

4. $f : x \mapsto 5\ln(x) - x + \dfrac{6}{x}$ sur $[1, 6]$ (on donne $5\ln(3) \leq 6$).
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$ et $x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$ et en particulier f est bien définie sur $[1, 6]$.
   - Dérivabilité : la fonction f est dérivable sur son domaine de définition comme quotient et somme de fonctions dérivables. De plus, pour tout $x > 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{5}{x} - 1 - \dfrac{6}{x^2} = \dfrac{-x^2 + 5x - 6}{x^2}$. Le discriminant vaut $\Delta = 1$ et les racines sont 2 et 3.
   - Tableau des variations :

x	0	1		2		3		6		$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$	0	$-$			
f		5	$\searrow$	$5\ln 2+1$	$\nearrow$	$5\ln 3-1$	$\searrow$	$5\ln(6)-5$	$\searrow$	

- Étude des extrema : La fonction f est ainsi majorée et minorée sur $[1,6]$. Comme $5\ln 3-1 \leq 5$, on obtient que $\sup_{[1,6]} f = \max_{[1,6]} f = 5$. Et comme $5\ln 2+1 > 5\ln 6-5$, on a : $\inf_{[1,6]} f = \min_{[1,6]} f = 5\ln 6-5$.

III Limites

$\to +\infty f(x) = +\infty$.

Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \ln x}$:

- Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x>0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
- Limite en 0^+ : Par propriété sur les produits et composée de limites, on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.
- Limite en $+\infty$: FI car $f(x) = \ln(x) e^{-x\ln 2}$. On va faire apparaître une croissance comparée en multipliant et divisant par x. On obtient que : $f(x) = \dfrac{x}{e^{\ln 2x}} \times \dfrac{\ln x}{x}$. Par croissances comparées, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{\ln 2x}} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$. Ainsi par propriété sur le produit de limite, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $+\infty$.

Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}}$:

- Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x \geq 0$ et $x \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
- Limite en 0^+ : Par propriété sur les composée et quotient de limites, on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.
- Limite en $+\infty$: FI donc on transforme l'expression afin de faire apparaître une croissance comparée. On pose par exemple $X = \sqrt{x}$ et on obtient que $f(x) = F(X) = \dfrac{e^X}{X^4}$. Ainsi par croissance comparée : $\lim\limits_{X\to+\infty} F(X) = +\infty$. Puis par propriété sur la composition de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = e^x - x^{\frac{2}{3}}}$:

- Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x>0$ car $x^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}\ln x}$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
- Limite en 0^+ : Par propriété sur les produit, composée et somme de limites, on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.
- Limite en $+\infty$: FI donc on met en facteur le terme dominant à savoir e^x. On obtient que : $f(x) = e^x\left(1 - \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{e^x}\right)$. Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{e^x} = 0$. Puis par propriété sur les somme et produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}}$:

- Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x-2 \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- Par propriété sur les sommes, quotient et composée de limites, on a : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$.

Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x-2}}}$:

- <u>Domaine de définition :</u> La fonction f est bien définie si $x-2 \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- Par propriété sur les sommes, quotient, composée et produit de limites, on a : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$.

Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}}$:

- <u>Domaine de définition :</u> La fonction f est bien définie si $x^2+1 > 0$ et $x \neq 0$ La première inéquation est toujours vraie comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.
- <u>Limite en $-\infty$:</u> FI donc on met en facteur le terme dominant x^2 dans le logarithme afin de faire apparaître une croissance comparée. On obtient que : $f(x) = 2\dfrac{\ln|x|}{x} + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x}$. Par croissance comparée, on a : $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\ln|x|}{x} = 0$ et par propriété sur les quotients, somme et composée de limites : $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x} = 0$. Donc par propriété sur les sommes de limites, on a : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$.
- <u>Limite en $+\infty$:</u> FI donc on met en facteur le terme dominant x^2 dans le logarithme afin de faire apparaître une croissance comparée. On obtient que : $f(x) = 2\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x}$. Par croissance comparée, on a : $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et par propriété sur les quotients, somme et composée de limites : $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x} = 0$. Donc par propriété sur les sommes de limites, on a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.
- <u>Limite en 0 :</u> FI donc on fait apparaître la limite connue suivante $\lim_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$ en écrivant que : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} \times x$. On a ainsi d'après les limites usuelles et par composition que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1$. Puis par propriété sur le produit de limites, on obtient que : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Correction 9. Avec des polynômes. Je ne donne ici que les résultats et l'idée d'une méthode possible pour obtenir la limite.

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^7+4x^2-1}{x^9+1} = 0$: théorème du monôme de plus haut degré.
2. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^7+x^2-x}{x^6+4x^2} = -\infty$: théorème du monôme de plus haut degré.
3. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x^7+x^2-x}{x^6+4x^2} = +\infty$: on met x en facteur puis propriété sur les limites.
4. $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{3x^2+2x-5}{x^2+4x-5} = \dfrac{4}{3}$: on met $x-1$ en facteur puis propriété sur les limites.
5. $\lim_{x\to -5^+} \dfrac{x^2+2x-15}{x^2+4x-5} = \dfrac{4}{3}$: on met $x+5$ en facteur.
6. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-2x}{2x^2-1} = -\infty$: théorème du monôme de plus haut degré.
7. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x^3-1} = \dfrac{5}{3}$: on met $x-1$ en facteur puis propriété sur les limites ou on peut aussi reconnaître un taux d'accroissement.
8. $\lim_{x\to -2^+} \dfrac{x^3+8}{|x+2|} = 12$ et $\lim_{x\to -2^-} \dfrac{x^3+8}{|x+2|} = -12$: on met $x+2$ en facteur au numérateur puis propriété sur les limites.

9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x - \cos x}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1} = \lim_{X\to 1} \dfrac{X^2 - X}{2X^2 - 3X + 1} = 1$: on met $X - 1$ en facteur puis propriété sur les limites.
10. $\lim_{x\to+\infty} x^2 - 3x + 1 - x|x-3| = 1$ car on peut prendre $x > 3$ et par propriété de la valeur absolue.
11. $\lim_{x\to-\infty} x^2 - 3x + 1 - x|x-3| = +\infty$ car on peut prendre $x < 3$ et par propriété de la valeur absolue.

Correction 10. Fonctions exponentielle et logarithme.

1. $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}} = \lim_{X\to+\infty} e^{\frac{X-1}{X+1}} = e$ par composition et le théorème sur le monôme de plus haut degré.
2. $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}} = \lim_{X\to-\infty} e^{\frac{X-1}{X+1}} = e$ par composition et le théorème sur le monôme de plus haut degré.
3. $\lim_{x\to \frac{1}{e}^+} e^{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}} = \lim_{X\to -1^+} e^{\frac{X-1}{X+1}} = 0$ et $\lim_{x\to \frac{1}{e}^-} e^{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}} = \lim_{X\to -1^-} e^{\frac{X-1}{X+1}} = +\infty$ par composition et par propriété sur les limites. Il n'y a donc pas de limite en $\dfrac{1}{e}$.
4. $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$, $a > 0$: en utilisant par exemple $\ln(1+ax) \underset{0}{\sim} ax$ puis $\dfrac{1}{x}\ln(1+ax) \underset{0}{\sim} a$ et enfin en repassant aux limites pour pouvoir composer par l'exponentielle.
5. $\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{x+2}}}\right)$. On a
$$x\sqrt{x}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{x+2}}}\right) = x\sqrt{x}e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}\left(1 - e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+2}}}\right) = x\sqrt{x}e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}\left(1 - e^{\frac{-1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})}}\right).$$
En utilisant l'équivalent usuel de l'exponentielle en 0 et par substitution, on obtient :
$$x\sqrt{x}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{x+2}}}\right) \underset{+\infty}{\sim} x\sqrt{x}e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}\frac{-1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}.$$
On a utilisé ici aussi le fait que $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}} = 1$ et qu'il est donc équivalent à 1 en $+\infty$.
6. $\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{\ln x}\right)^{\ln(1/x)} = e^{-1}$ en utilisant par exemple $\ln\left(1+\dfrac{1}{\ln x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln x}$ par substitution puis en multipliant par $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x$ puis en repassant aux limites pour pouvoir composer par l'exponentielle.
7. $\lim_{x\to 1^+}\left(1 + \dfrac{1}{\ln x}\right)^{\ln(1/x)} = 1$ en posant $X = \ln x$ qui tend vers 0^+ quand x tend vers 1^+ et en écrivant que : $\left(1 + \dfrac{1}{\ln x}\right)^{\ln(1/x)} = e^{-X\ln\left(1+\frac{1}{X}\right)} = e^{-X\ln(X+1) + X\ln X}$ et en utilisant la croissance comparée et les propriétés sur les limites.
8. $\lim_{x\to+\infty}(1+e^x)^{1/x} = e$ en mettant le terme prépondérant e^x en facteur dans le logarithme népérien et en séparant avec $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ puis propriétés sur les limites.
9. $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$. On a : $\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x} = e^{x\ln x\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)}$. Or on a
$$\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right) = \ln\left(\frac{\ln x + \ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}\right) = \ln\left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}\right).$$
De plus, on a : $\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x\ln x}$ et cela tend vers 0 quand x tend vers l'infini. Ainsi, par substitution, on obtient :
$$\ln\left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x\ln x}.$$
D'où : $x\ln x\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right) \underset{+\infty}{\sim} 1$ et en repassant au limite, on a : $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x} = e$.

10. $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$ en utilisant par substitution que : $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.
11. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x^2)+\ln(2x)-x^3}{3x^3+\sin x - x} = -\frac{1}{3}$. On met en facteur x^3 au numérateur et au dénominateur car c'est le terme prépondérant puis on utilise une croissance comparée et le corollaire du théorème des gendarmes pour le cosinus et le sinus.
12. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x}\left(e^{\frac{1}{x+1}}-1\right) = 1$. On utilise par substitution l'équivalent usuel de l'exponentielle en 0 puis le théorème sur les monômes de plus haut degré.

Correction 11. Avec des racines.

1. $\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ et $\lim_{x\to0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ par propriété de la valeur absolue.
2. $\lim_{x\to+\infty} x+2-\sqrt{x^2-3x-1} = \frac{7}{2}$ quantité conjuguée puis on met en facteur le terme prépondérant x.
3. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x^3} = +\infty$ en utilisant la quantité conjuguée et en mettant en facteur le terme prépondérant.
4. $\lim_{x\to-1^-} \frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3} = +\infty$ et $\lim_{x\to-1^+} \frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3} = -\infty$ en mettant sur le même dénominateur qui est $(x+1)^3$.
5. $\lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = +\infty$ car en simplifiant par la racine en haut et en bas on obtient $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.
6. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x} = 1$ en mettant en facteur le terme prépondérant x^2 dans la racine et en le sortant de la racine.
7. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}+x = 0$ en utilisant la quantité conjuguée.
8. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-5x+1}} = 2$ en mettant en facteur en haut et en bas le terme prépondérant.
9. $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{7+2x}-3}{x^2-1} = \frac{1}{3}$ en utilisant la quantité conjuguée puis en mettant en facteur $x-1$ au numérateur et au dénominateur.
10. $\lim_{x\to2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} = \frac{3}{2}$ en utilisant la quantité conjuguée pour le numérateur et pour le dénominateur.
11. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} = \frac{1}{2}$ en utilisant la quantité conjuguée et en mettant ensuite en facteur le terme prépondérant au dénominateur.
12. $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}} = \frac{m}{n}\times\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}}$ en faisant apparaître deux taux d'accroissements.

Correction 12. Avec des fonctions trigonométriques.

1. $\lim_{x\to0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ en utilisant l'encadrement du sinus et le théorème des gendarmes. Une première méthode consiste à distinguer 2 cas : $x>0$ et $x<0$.

   Pour tout $x\in\mathbb{R}^\star$: $-1\leq \sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq 1$.

   - Cas 1 : si $x>0$:

     On a alors comme $x>0$: $-1\leq\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq1 \Leftrightarrow -x\leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq x$. Puis comme $\lim_{x\to0^+} -x = \lim_{x\to0^+} x = 0$, le théorème des gendarmes assure que $\lim_{x\to0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

- Cas 2 : si $x < 0$:
  On a alors comme $x < 0$: $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Leftrightarrow x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq -x$. Puis comme $\lim\limits_{x\to 0^-} -x = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$, le théorème des gendarmes assure que $\lim\limits_{x\to 0^-} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, la limite en 0 existe bien et $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$.
Une autre méthode, pour éviter d'avoir à faire des cas, consiste à encadrer la valeur absolue de l'expression. On a en effet, $\forall x \in \mathbb{R}^\star$:

$$0 \leq \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|.$$

Or $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$, donc par théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ en utilisant l'encadrement du sinus et le théorème des gendarmes. On a en effet :

$$0 \leq \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \left|\sin x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |\sin x|.$$

Or $\lim\limits_{x\to 0} |\sin x| = 0$, donc par théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \sin x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$.

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1} = 0$ en utilisant l'encadrement du sinus et le théorème des gendarmes :

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x\sin x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1}$$

car $\frac{x}{x^2+1} > 0$ car on calcule la limite en $+\infty$. De plus $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 = \lim\limits_{x\to +\infty} -\frac{x}{x^2+1}$ d'après le théorème du monôme de plus haut degré. On obtient alors bien que $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1} = 0$ en utilisant le théorème des gendarmes.

4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2\cos x}{x^2+1}$ PAS DE LIMITE. Prendre $u_n = 2n\pi$ et $v_n = 2n\pi + \pi$.

5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x^2 - \ln x} = 0$ en utilisant l'encadrement du sinus et le théorème des gendarmes.
   On commence par trouver un équivalent du dénominateur : on a $x^2 - \ln x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ car $\frac{x^2 - \ln x}{x^2} = 1 - \frac{\ln x}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ par théorème des croissances comparées.
   On encadre ensuite l'équivalent obtenu :

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}.$$

   De plus $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 = \lim\limits_{x\to +\infty} -\frac{1}{x^2}$. On obtient alors bien que $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0$ en utilisant le théorème des gendarmes, puis que $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x^2 - \ln x} = 0}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$. Il faut transformer l'expression par les formules trigonométriques pour lever l'indétermination. On a

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{1-\cos x}{x^2\cos x} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} \times \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x}{x} \times \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos x}.$$

   En reconnaissant des limites usuelles, on obtient le résultat.

7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos(3x)}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ en utilisant les équivalents usuels en 0. On peut bien passer à la racine dans un équivalent car c'est une puissance.
8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(6x)}{\tan(4x)} = \dfrac{3}{2}$ en utilisant les équivalents usuels en 0.
9. $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos x - 1}{2\sin x - \sqrt{3}} = -\sqrt{3}$ en mettant 2 en facteur et en reconnaissant deux taux d'accroissements.
10. $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\tan x - \sin x}{x}\right)^{x^2}$. On a

$$\left(\frac{\tan x - \sin x}{x}\right)^{x^2} = e^{x^2 \ln\left(\frac{\tan x - \sin x}{x}\right)} = e^{x^2 \ln\left(\frac{\tan x}{x}(1-\cos x)\right)} = e^{x^2 \ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)} \times e^{x^2 \ln(1-\cos x)}.$$

De plus, on sait que : $1 - \cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$. On ne peut pas composer par le logarithme, donc on utilise le raisonnement suivant :

$$x^2 \ln(1-\cos x) = x^2 \ln\left(\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} \times \frac{x^2}{2}\right) = x^2 \ln\left(\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}\right) + x^2 \ln\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Or on a $\lim_{x\to 0} x^2 \ln\left(\dfrac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}\right) = 0$, et par croissance comparée, $\lim_{x\to 0} x^2 \ln\left(\dfrac{x^2}{2}\right) = 0$. Comme on a aussi en utilisant une limite usuelle et les propriétés sur les produit et composée de limites : $\lim_{x\to 0} x^2 \ln\left(\dfrac{\tan x}{x}\right) = 0$, on obtient finalement que : $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\tan x - \sin x}{x}\right)^{x^2} = 1$.