

TD - 8 : Etude de fonctions

I Ensemble de définition

Exercice 1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

- $f(x) = \sqrt{x^3}$
- $f(x) = \frac{1}{x - \frac{1}{x}}$
- $f(x) = \sqrt{x-3} + \frac{\sqrt{5+x}}{x}$
- $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$
- $f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x+4}\right)$

Exercice 2. Déterminer en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ l'ensemble de définition de la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} donnée par

$$f(x) = \sqrt{x^2 - (m+1)x + m}.$$

Exercice 3. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ après avoir indiqué pour quels réels cela a un sens :

- $f : x \mapsto 2x^2 - x + 1$ et $g : x \mapsto 2\sqrt{x-3}$.
- $f : x \mapsto \frac{2x^2 - 8}{x}$ et $g : x \mapsto x + \frac{1}{x}$.

Exercice 4. Pour chacune des expressions, donner le domaine de définition et simplifier quand c'est possible.

- $f(x) = x \ln \sqrt{e^{\frac{x}{2}}} + \left(\sqrt{e^{2 \ln(2x-1)}}\right)^3$.
- $g(x) = e^{\sqrt{\ln x}} + e^{(\ln x)^2}$.

II Calculs d'ensembles de dérivabilité et de dérivées

Exercice 5. On pose $P(x) = x^2 + 3x$, $Q(x) = x^2 + x + 1$, $S(x) = x^2 - 1$.

- Calculer $P^2(x)$, $P(x) - Q(x)$ et $P^2(x) - Q^2(x)$ et leur dérivées
- Calculer $P(x+1)$ et sa dérivée
- Calculer $S \circ f(t)$ avec $f : t \mapsto \cos(t)$ et sa dérivée

Exercice 6. Donner l'ensemble de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer leur dérivées :

- $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$
- $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- $f(x) = \sqrt{e^x}$
- $f(x) = e^{x \cos(x)}$
- $f(x) = (1-x)e^{\sqrt{x-x^2}}$
- $f(x) = \frac{\sin^3(2x)}{2 + \cos(5x)}$
- $f(x) = \sin(\ln x)$
- $f(x) = \ln(e^x + x^2)$
- $f(x) = \frac{x - e^x}{e^x + 1}$
- $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{\sqrt{9x^2-4}}\right)$
- $f(x) = \frac{1}{(\cos(x))^4}$
- $f(x) = \frac{1}{2^{x+1}}$
- $f(x) = (e^{2x} - 1)^\pi$
- $f(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{3^x}\right)^4$
- $f(x) = 2^{\ln x}$
- $f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$
- $f(x) = \ln(\ln x)$
- $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 - 1} + x)$
- $f(x) = \frac{3^{x-1} \cos x}{x^x}$

Exercice 7. (Avec des valeurs absolues) Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes, puis leur ensemble de dérivabilité, et calculer leur dérivées :

- $f(x) = \frac{\ln(|x^2 - 1|)}{x}$
- $f(x) = \frac{x}{\sqrt{|e^x - 1|} + 1}$

Exercice 8. Déterminer lorsqu'ils existent les bornes supérieures, inférieures, maxima et minima des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur $[0, +\infty[$.

2. $f : x \mapsto \cos x + \sin x$ sur \mathbb{R} .

3. $f : x \mapsto \frac{1}{1 + \ln(x)}$ sur $[1, +\infty[$.

4. $f : x \mapsto 5 \ln(x) - x + \frac{6}{x}$ sur $[1, 6]$ (on donne $5 \ln(3) \leq 6$).

III Limites

Exercice 9. Calculer les limites des fonctions suivantes aux bornes de leur domaine de définition. On justifiera correctement les résultats. On fera, lorsque cela est possible, l'interprétation graphique des résultats.

1. $f(x) = e^{x^2+x+1}$

2. $f(x) = e^{2x} - e^x$

3. $f(x) = \frac{e^x + x^2 + x + 1}{e^{2x} + 1}$

4. $f(x) = \frac{x}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$

5. $f(x) = e^{x^2} - e^{x+1}$

6. $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$

7. $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + x^2}{2x + 1}\right)$

8. $f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x+4}\right)$

9. $f(x) = \frac{2^x}{x^2 + 1}$

10. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln x$

11. $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}$

12. $f(x) = e^x - x^{\frac{2}{3}}$

13. $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$

14. $f(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x-2}}$

15. $f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$

Exercice 10. Avec des polynômes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7 + 4x^2 - 1}{x^9 + 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^7 + x^2 - x}{x^6 + 4x^2}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^7 + x^2 - x}{x^6 + 4x^2}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 4x - 5}$

5. $\lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 4x - 5}$

6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x}{2x^2 - 1}$

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$

8. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{|x + 2|}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos x}{2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1}$

10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3x + 1 - x|x - 3|$

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 3x + 1 - x|x - 3|$

Exercice 11. Fonctions exponentielle et logarithme :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}}$

3. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} e^{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}}, a > 0$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{x+2}}} \right)$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln x} \right)^{\ln(1/x)}$

7. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 + \frac{1}{\ln x} \right)^{\ln(1/x)}$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^x)^{1/x}$

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^{x \ln x}$

10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)$

11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x^2) + \ln(2x) - x^3}{3x^3 + \sin x - x}$

12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x} \left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1 \right)$

Exercice 12. Avec des racines :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 - \sqrt{x^2 - 3x - 1}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x^3}$

4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}$

5. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x}$

7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 - 5x + 1}}$

9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{7+2x} - 3}{x^2 - 1}$

10. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$

11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$

12. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}},$
 $(n, m) \in \mathbb{N}^2$

Exercice 13. Fonctions trigonométriques :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1}$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^2 + 1}$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2 - \ln x}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1 - \cos(3x)}}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{\tan(4x)}$

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{2 \sin x - \sqrt{3}}$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x}\right)^{x^2}$