Correction - DM3

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la somme pour tout $x \in]0, 2\pi[$:

$$Z_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}.$$

1. Montrer par récurrence que $Z_n(x) = \frac{1-e^{(n+1)ix}}{1-e^{ix}}$.
2. Montrer que
$$Z_n(\frac{\pi}{n}) = \frac{1+e^{i\frac{\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$$
Et en déduire la valeur de $Re(Z_n(\frac{\pi}{n}))$ et $Im(Z_n(\frac{\pi}{n}))$

   On pose pour $n \geq 2$:
$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$
3. Justifier que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
4. Exprimer S_n en fonction de Z_n.
5. En déduire que : $S_n = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.
6. En déduire la valeur de $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
7. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$. (On rappelle que $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$. Le prouver à l'aide de la définition de la dérivée)

Correction 1.

1. Cours
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{0\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)$ Or $\sin\left(\frac{0\pi}{n}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{n\pi}{n}\right) = \sin(\pi) = 0$.
Donc
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

3. On a $Z(\dfrac{\pi}{n}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik\frac{\pi}{n}}$. D'après la question 1 :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e^{ik\frac{\pi}{n}} &= \frac{1 - e^{i(n+1)\frac{\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} \\
&= \frac{1 - e^{i\pi + i\frac{\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} \\
&= \frac{1 + e^{i\frac{\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} \\
&= \frac{e^{i\frac{\pi}{2n}}\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} + e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)}{e^{i\frac{\pi}{2n}}\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)} \\
&= \frac{\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} + e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)}{\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)} \\
&= \frac{2\cos(\frac{\pi}{2n})}{2i\sin(\frac{\pi}{2n})} \\
&= \frac{1}{i\tan(\frac{\pi}{2n})}
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Im}(Z(x)) &= \mathfrak{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{Im}(e^{ikx}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sin(kx))
\end{aligned}$$

Donc $S_n = \mathfrak{Im}(Z(\frac{\pi}{n})) = \mathfrak{Im}(\frac{1}{i\tan(\frac{\pi}{2n})}) = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2n})}$

4. On a d'après la question précédente $\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{8}} = S_4$ Donc $\tan(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{S_4}$.

Par ailleurs $S_4 = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{1\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$.

Donc

$$\boxed{\tan(\tfrac{\pi}{8}) = \tfrac{1}{1+\sqrt{2}}}$$

5. Montrons que $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$. On a en effet pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$:

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \cos'(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)}\end{aligned}$$

En particulier $\tan'(0) = 1$ et par définition de la dérivée en 0 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0} = \tan'(0) = 1$$

On a $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n\tan(\frac{\pi}{2n})}$, et

$$\begin{aligned}n\tan(\frac{\pi}{2n}) &= \frac{\tan(\frac{\pi}{2n})}{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{\frac{\pi}{2}\tan(\frac{\pi}{2n})}{\frac{\pi}{2n}}\end{aligned}$$

On vient de voir que $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$, comme $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} = 0$ on a par composé de limites :

$$\lim_{n\to\infty} n\tan(\frac{\pi}{2n}) = \frac{\pi}{2}.$$

En conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{2}{\pi}.}$$

Exercice 2. Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

1. Calculer
$$\inf\left\{\left|\frac{1}{z} + z\right|, z \in \mathbb{U}\right\}$$

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on note $\alpha(z) = \frac{1}{z} + z$.
   (a) Calculer le module de $\alpha(z)$ en fonction de celui de z.
   (b) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $\frac{1}{x} + x \geq 2$.
   (c) En déduire
$$\inf\{|\alpha(z)|, z \in \mathbb{C}^*\}$$

Correction 2.

1. Comme $z \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$. Donc

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{z} + z\right| &= \left|e^{-i\theta} + e^{i\theta}\right| \\ &= \left|2\cos(\frac{\theta}{2}\right|\end{aligned}$$

   Pour $\theta = \pi$ on a $\left|2\cos(\frac{\theta}{2}\right| = 0$ donc

$$\inf\left\{\left|\frac{1}{z} + z\right|, z \in \mathbb{U}\right\} = 0$$

2. (a)

$$\begin{aligned}|\alpha(z)| &= \left|\frac{1}{\overline{z}} + z\right| \\ &= \left|\frac{1 + z\overline{z}}{\overline{z}}\right| \\ &= \left|\frac{1 + |z|^2}{\overline{z}}\right| \\ &= \frac{|1 + |z|^2|}{|\overline{z}|} \\ &= \frac{1 + |z|^2}{|z|} \\ &= \frac{1}{|z|} + |z|\end{aligned}$$

   (b) Pour tout $x > 0$ on a

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{x} - 2 &= \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \\ &= \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0\end{aligned}$$

   Donc pour tout $x > 0$, $x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$.

   (c) On a $|\alpha(1)| = \frac{1}{|1|} + |1| = 2$ et on a vu que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $|\alpha(z)| \geq 2$ donc

$$\inf\{|\alpha(z)|, z \in \mathbb{C}^*\} = 2$$