

Correction DS3

Exercice 1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le système suivant

$$(S_\lambda) \quad \begin{cases} x + y + z = \lambda x \\ x + y + z = \lambda y \\ x + y + z = \lambda z \end{cases}$$

1. Échelonner le système.
2. Déterminer le rang de S_λ en fonction de λ
3. Déterminer Σ l'ensemble des réels λ pour lequel ce système n'est pas de Cramer.
4. Pour $\lambda \in \Sigma$, résoudre S_λ
5. Quelle est la solution si $\lambda \notin \Sigma$.

Correction 1.

1.

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} (1-\lambda)x + y + z = 0 \\ x + (1-\lambda)y + z = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$L_3 \leftrightarrow L_1$

$$\iff \begin{cases} x + y + (1-\lambda)z = 0 \\ x + (1-\lambda)y + z = 0 \\ (1-\lambda)x + y + z = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \quad L_3 \leftarrow L_2 - (1-\lambda)L_1$

$$\iff \begin{cases} x + y + (1-\lambda)z = 0 \\ -\lambda y + \lambda z = 0 \\ \lambda y + (1 - (1-\lambda)^2)z = 0 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\iff \begin{cases} x + y + (1-\lambda)z = 0 \\ -\lambda y + \lambda z = 0 \\ (1 - (1-\lambda)^2 + \lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + (1-\lambda)z = 0 \\ -\lambda y + \lambda z = 0 \\ \lambda(3-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

2. Tout d'abord remarquons que $\lambda(3-\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{0, 3\}$

On a donc trois cas :

Si $\lambda = 0$

$$S_\lambda \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Le système est de rang 1

Si $\lambda = 3$

$$S_\lambda \iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Le système est de rang 2

Si $\lambda \notin \{0, 3\}$

$$S_\lambda \iff \begin{cases} x + y + (1 - \lambda)z = 0 \\ -y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Le système est de rang 3

3. Le système n'est pas de Cramer pour $\lambda \in \{0, 3\}$

$\Sigma = \{0, 3\}$

4. Si $\lambda = 0$ L'ensemble des solutions de S_λ est

$$\mathcal{S} = \{(-y - z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$$

Si $\lambda = 3$

$$S_\lambda \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de S_λ est

$$\mathcal{S} = \{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

5. Si $\lambda \notin \{0, 3\}$

Le système est de Cramer, de plus il est homogène donc

$$\mathcal{S} = \{(0, 0, 0)\}$$

Exercice 2. On définit deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 0 \quad v_0 = 1 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n - 4v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = u_n + 4v_n.$$

1. INFO Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne les valeurs de u_n et v_n .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 12u_n$$
3. Calculer les racines de $X^2 - 6X + 12$ et les mettre sous formes exponentielles.
4. En déduire la valeur de u_n en fonction de n .

Correction 2.

```
1 def suite(n):
2     u, v = 0, 1
3     for i in range(n):
4         u, v = 2*u - 4*v, u + 4*v
5     return (u, v)
```

2. Avec la définition de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on obtient bien l'égalité demandée :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2u_{n+1} - 4v_{n+1} \\ &= 2u_{n+1} - 4(u_n + 4v_n) \\ &= 2u_{n+1} - 4u_n + 4 * (-4v_n) \\ &= 2u_{n+1} - 4u_n + 4 * (u_{n+1} - 2u_n) \\ &= 6u_{n+1} - 12u_n \end{aligned}$$

3. Le discriminant de $X^2 - 6X + 12$ est $\Delta = 36 - 48 = -12$, le polynôme admet donc deux racines complexes conjuguées

$$r_1 = \frac{6 - i\sqrt{12}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{6 + i\sqrt{12}}{2}$$

qui se simplifient en

$$r_1 = 3 - i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad r_2 = 3 + i\sqrt{3}$$

Leur module vaut $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ et on a donc

$$\begin{aligned} r_1 &= 2\sqrt{3} \left(\frac{3 - i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \right) \\ &= 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3} - i}{2} \right) \\ &= 2\sqrt{3} e^{-i\pi/6} \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{r_1 = 2\sqrt{3}e^{-i\pi/6} \quad \text{et} \quad r_2 = 2\sqrt{3}e^{i\pi/6}}$$

4. On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2

Le cours nous dit qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout n on a :

$$u_n = A(2\sqrt{3})^n \cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) + B(2\sqrt{3})^n \sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)$$

Il suffit maintenant de déterminer A et B à l'aide des valeurs de u_0 et u_1 . u_0 est donné dans l'énoncé et u_1 se calcule facilement avec la relation définissant u_n :

$$u_1 = 2u_0 - 4v_0 = -4$$

On obtient alors le système :

$$\begin{cases} A &= u_0 \\ A(2\sqrt{3}) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + B(2\sqrt{3}) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) &= u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} A &= 0 \\ B\sqrt{3} &= -4 \end{cases} \iff \begin{cases} A &= 0 \\ B &= \frac{-4\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{u_n = \frac{-4\sqrt{3}}{3} (2\sqrt{3})^n \sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)}$$

Exercice 3. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On considère $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$

- Calculer $\frac{1}{\omega}$ en fonction de $\bar{\omega}$
- Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, 7 \rrbracket$ on a

$$\omega^k = \bar{\omega}^{7-k}.$$

- En déduire que $\bar{A} = B$.
- Justifier que $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) > 0$.
- Montrer alors que la partie imaginaire de A est strictement positive.
- Prouver par récurrence que pour tout $q \neq 1$, et tout $n \in \mathbb{N}$: on a :

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

7. Montrer alors que $\sum_{k=0}^6 \omega^k = 0$. En déduire que $A + B = -1$.
8. Montrer que $AB = 2$.
9. En déduire la valeur exacte de A .

Correction 3.

1.

$$\frac{1}{\omega} = e^{-\frac{2i\pi}{7}} = \bar{\omega}$$

2. On a $\omega^7 = e^{7\frac{2i\pi}{7}} = e^{2i\pi} = 1$ donc pour tout $k \in \llbracket 0, 7 \rrbracket$ on a

$$\omega^{7-k}\omega^k = 1$$

D'où

$$\omega^k = \frac{1}{\omega^{7-k}} = \bar{\omega}^{7-k}$$

3. On a d'après la question précédente :

$$\bar{\omega} = \omega^6$$

$$\bar{\omega^2} = \omega^5$$

$$\bar{\omega^4} = \omega^3$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \overline{\omega + \omega^2 + \omega^4} \\ &= \bar{\omega} + \bar{\omega^2} + \bar{\omega^4} \\ &= \omega^6 + \omega^5 + \omega^3 \\ &= B. \end{aligned}$$

4.

$$\Im(A) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

Comme \sin est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

$$\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \leq \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$$

Donc

$$\Im(A) \geq \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) > 0$$

5. On a

$$\sum_{k=0}^6 \omega^k = \frac{1 - \omega^7}{1 - \omega} = 0$$

Or

$$A + B = \sum_{k=1}^6 \omega^k = \sum_{k=0}^6 \omega^k - 1 = -1$$

6. $AB = \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^5 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^7 + \omega^9 + \omega^{10}$ D'où

$$AB = 2\omega^7 + \omega^4(1 + \omega^1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6) = 2\omega^7 = 2$$

7. A et B sont donc les racines du polynôme du second degré $X^2 + X + 2$. Son discriminant vaut $\Delta = 1 - 8 = -7$ donc

$$A \in \left\{ \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2} \right\}$$

D'après la question 4, $\Im(A) > 0$ donc

$$A = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$$

Exercice 4. Soient z, z' deux nombres complexes.

- Rappeler les valeurs de $z\bar{z}$, $|z\bar{z}|$, $|\bar{z}z'|^2$ en fonction de $|z|$ et $|z'|$.
- Montrer que $|z - z'|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(zz') + |z'|^2$
- On suppose dans cette question et la suivante que $|z| < 1$ et $|z'| < 1$. Montrer que

$$\bar{z}z' \neq 1$$

- Montrer que

$$1 - \left| \frac{z - z'}{1 - \bar{z}z'} \right|^2 = \frac{(1 - |z'|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{z}z'|^2}$$

- Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes vérifiant : $|z_0| < 1, |z_1| < 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$z_{n+2} = \frac{z_n - z_{n+1}}{1 - \bar{z}_n z_{n+1}}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| < 1$ et que $\bar{z}_n z_{n+1} \neq 1$, et donc que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pourra utiliser les deux questions précédentes dans une récurrence double

Correction 4.

- Comme $|z| < 1$ et $|z'| < 1$ on a $|\bar{z}z'| = |\bar{z}||z'| = |z||z'| < 1$. Or si deux nombres complexes sont égaux ils ont même module, donc $\bar{z}z'$ ne peut pas être égal à 1, sinon ils auraient le même module.
- Après avoir mis au même dénominateur le membre de gauche, on va utiliser le fait que pour tout complexe u , on a $|u|^2 = u\bar{u}$:

$$\begin{aligned} 1 - \left| \frac{z - z'}{1 - \bar{z}z'} \right|^2 &= \frac{|1 - \bar{z}z'|^2 - |z - z'|^2}{|1 - \bar{z}z'|^2} \\ &= \frac{(1 - \bar{z}z')(1 - \overline{\bar{z}z'}) - (z - z')(z - z')}{|1 - \bar{z}z'|^2} \\ &= \frac{(1 - \bar{z}z')(1 - z\bar{z}') - (z - z')(\bar{z} - \bar{z}')}{|1 - \bar{z}z'|^2} \\ &= \frac{(1 - \bar{z}z' - z\bar{z}' + |\bar{z}z'|^2) - (|z|^2 - \bar{z}'z - \bar{z}z' + |z'|^2)}{|1 - \bar{z}z'|^2} \\ &= \frac{(1 + |\bar{z}z'|^2 - |z|^2 - |z'|^2)}{|1 - \bar{z}z'|^2} \end{aligned}$$

Remarquons enfin que $(1 - |z|^2)(1 - |z'|^2) = 1 + |\bar{z}z'|^2 - |z|^2 - |z'|^2$. Or $|\bar{z}z'|^2 = |\bar{z}|^2|z'|^2 = |z|^2|z'|^2 = |\bar{z}z'|^2$. On a bien

$$1 - \left| \frac{z - z'}{1 - \bar{z}z'} \right|^2 = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |z'|^2)}{|1 - \bar{z}z'|^2}$$

3. Soit $P(n)$ la propriété : « $|z_n| < 1$ et $|z_{n+1}| < 1$ ». Remarquons que d'après la question 2, $P(n)$ implique que $\overline{z_n}z_{n+1} \neq 1$ et donc que z_{n+2} est bien définie.

Prouvons $P(n)$ par récurrence.

Initialisation : $P(0)$ est vraie d'après l'énoncé : $|z_0| < 1$ et $|z_1| < 1$.

Hérédité : On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Montrons alors $P(n+1)$: « $|z_{n+1}| < 1$ et $|z_{n+2}| < 1$ ». Par hypothèse de récurrence on sait déjà que $|z_{n+1}| < 1$ il reste donc à prouver que $|z_{n+2}| < 1$.

On a

$$|z_{n+2}| = \left| \frac{z_n - z_{n+1}}{1 - \overline{z_n}z_{n+1}} \right|$$

Or d'après la question 3,

$$\left| \frac{z_n - z_{n+1}}{1 - \overline{z_n}z_{n+1}} \right|^2 = 1 - \frac{(1 - |z_n|^2)(1 - |z_{n+1}|^2)}{|1 - \overline{z_n}z_{n+1}|^2}$$

Par hypothèse de récurrence, $(1 - |z_n|^2)(1 - |z_{n+1}|^2) > 0$. Le dénominateur est aussi positif, donc $\frac{(1 - |z_n|^2)(1 - |z_{n+1}|^2)}{|1 - \overline{z_n}z_{n+1}|^2} > 0$ et ainsi :

$$\left| \frac{z_n - z_{n+1}}{1 - \overline{z_n}z_{n+1}} \right|^2 < 1$$

Donc $|z_{n+2}| < 1$. On a donc prouvé que la propriété P était héréditaire.

Conclusion : Par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et comme remarqué au début de récurrence, ceci implique que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INFORMATIQUE

Exercice 5. 1. Dire ce qu'affiche la console avec les scripts suivants

```
1 #script 1
2 L=[2*k for k in range(1,5)]
3 print(L)
```

```
1 #script 2
2 L=[k for k in range(1,5)]
3 print(L+L)
```

2. Ecrire une fonction `max_list` qui prend en argument une liste de flottants et retourne la position du maximum de cette liste. Si plusieurs valeurs réalisent ce maximum, la fonction retournera le premier indice.

Exemple `max_list([1,5,3,5,0,2])` retournera la valeur 1

3. Que fait la fonction mystère suivante :

```
1 def mystere(L):
2     Lt=[]
3     while len(Lt)<len(L):
4         i_m=max_list(L) #fonction de la question 2
5         Lt.append(L[i_m]) #Li.append(x) ajoute l'element x a la liste Li
6         L=L[:i_m]+L[i_m+1:]
7     return(Lt)
```

4. Compléter (en la recopiant sur votre copie) la fonction suivante qui prend en argument une liste de flottants L et un flottant a et retourne une liste contenant tous les éléments de L supérieur ou égal à a

```

1     def sous_liste_sup(L, a):
2         Lsup=[]
3         for el in L:
4             if .... :
5                 Lsup.....
6         return (Lsup)

```

Correction 5.

1. Le script 1 affiche

[2,4,6,8]

Le script 2 affiche

[1,2,3,4,1,2,3,4]

```

21    def max_list(L):
2        c=0
3        M=L[0]
4        for i in range(len(L)):
5            if L[i]>M:
6                M=L[i]
7                c=i
8        return (c)

```

3. La fonction crée une liste vide, la remplit en ajoutant le maximum de la liste L puis on enlève la valeur du maximum en question de la liste L . Ainsi L_t est triée du plus grand au plus petit.

mystere retourne une liste triée du plus grand au plus petit

```

41    def sous_liste_sup(L, a):
2        Lsup=[]
3        for el in L:
4            if el>=a :
5                Lsup.append(el)
6        return (Lsup)

```