DM 6

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 3 & -7 & 3 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$. On désigne par I_3 la matrice identité d'ordre 3 et par 0_3 la matrice nulle d'ordre 3. On se propose de calculer les puissances de A de plusieurs manières. Ainsi, les trois méthodes sont totalement indépendantes les unes des autres et aucun résultat d'une méthode précédente ne peux être utilisé dans une autre méthode.

1. **Méthode une :** On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Calculer $D = P^{-1}AP$ puis exprimer A en fonction de P, D et P^{-1}.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner et démontrer l'expression de A^n en fonction de P, D^n et P^{-1}.
   (d) Étudier l'inversibilité de A et calculer A^{-1} si A est inversible.
2. **Méthode deux :**
   (a) On pose $B = A - 2I_3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer B^n en fonction de B.
   (b) En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de n, A et I_3.
   (c) On définit les trois suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient les relations

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = -x_n - 3y_n + 3z_n \\ y_{n+1} = 3x_n - 7y_n + 3z_n \\ z_{n+1} = 6x_n - 6y_n + 2z_n. \end{cases}$$

      i. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

      ii. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de x_n, y_n et z_n en fonction de n et des réels x_0, y_0 et z_0.
      iii. Si $x_0 = y_0 = 1$ et $z_0 = 2$, les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles convergentes ? Préciser les limites lorsqu'elles existent.
3. **Méthode trois :**
   (a) Donner une relation entre A^2, A et I_3.
   (b) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
   (c) Démontrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier n : $A^n = a_nA + b_nI_3$. Donner les relations de récurrence vérifiées par ces deux suites.
   (d) En déduire l'expression de a_n et de b_n en fonction de n puis celle de A^n en fonction de n, A et I_3.
   (e) En reprenant l'expression de l'inverse de A en fonction de A et de I_3, calculer $A^{-n} = (A^{-1})^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.