

# TD - 11 : Matrices

## I Calculs : opérations élémentaires sur les matrices

**Exercice 1.** On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1. Calculer, lorsque cela est possible,  $A + B$ ,  $AB$ ,  $BA$ ,  $A^2$ ,  $AC$ ,  ${}^tB{}^tA$ ,  $CA$ ,  $C^2$ ,  $(C - 2I_3)^3$ ,  $XB$  et  ${}^tBX$ .
2. Résoudre l'équation, d'inconnue  $X$  :  $CX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 2.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Représenter la matrice  $A$  dans les cas suivants :

1.  $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ ,  $a_{ij} = \max(i, j)$
2.  $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ ,  $a_{ij} = |i - j|$
3.  $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ ,  $a_{ij} = 1$  si  $i \leq j$ ,  $a_{ij} = 0$  sinon.

## II Puissances n-ièmes de matrice carrée

**Exercice 3.** Soient les deux matrices suivantes :  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $B^3$ .  $B$  est-elle inversible ?
2. Calculer les puissances n-ièmes de  $C$ .

**Exercice 4.** On considère la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer  $N^2$ . Donner une relation entre  $N^2$ ,  $N$  et  $I_3$ .  $N$  est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
2. Montrer qu'il existe deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, N^n = u_n N + v_n I.$$

3. En déduire  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ . Puis donner l'expression de  $N^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Soient  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  trois suites de réels telles que  $x_0 = y_0 = 1$  et  $z_0 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 2y_n + z_n \\ y_{n+1} = 2x_n - 3y_n + 2z_n \\ z_{n+1} = -x_n + 2y_n. \end{cases}$$

Calculer  $x_n$ ,  $y_n$  et  $z_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 5.** Soient les deux matrices suivantes :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Déterminer des réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $A = \alpha I_3 + \beta J$ . Calculer  $J^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- En déduire  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- Soient  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  trois suites de réels telles que  $x_0 = y_0 = z_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n. \end{cases}$$

Calculer  $x_n$ ,  $y_n$  et  $z_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 6.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Montrer que  $A^n$  est de la forme

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

- Déterminer  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 7.** Méthode par diagonalisation :

- Soit  $A$  une matrice carrée diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe  $P$  une matrice inversible telle que  $P^{-1}AP = D$  où  $D$  est diagonale.

(a) Exprimer  $A$  en fonction de  $D$ .

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $A^n$  en fonction de  $P$ ,  $P^{-1}$  et  $D^n$ .

(c) Montrer que  $A$  inversible si et seulement si  $D$  est inversible et, qu'on a alors :  $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ .

- Application : soit  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

(a) Vérifier que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ .

(b) Vérifier que  $M$  est diagonalisable et calculer la matrice diagonale associée.

(c) Étudier l'inversibilité de  $M$ .

(d) Calculer  $M^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 8.** Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Résoudre, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , le système :  $(A - \lambda I_3)X = 0_{31}$  avec  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

2. Montrer que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ . Calculer  $P^{-1}AP$ .

3. En déduire  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

4. La matrice  $A$  est-elle inversible ?

5. On considère trois suites  $u$ ,  $v$  et  $w$  définies par

$$u_0 = 0, v_0 = 1, w_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n - w_n \\ v_{n+1} = v_n \\ w_{n+1} = -u_n + 2v_n + w_n. \end{cases}$$

Donner l'expression explicite de chacune de ces trois suites.

**Exercice 9.** Soient  $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Résoudre, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , le système :  $(A - \lambda I_3)X = 0_{31}$  avec  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

2. Montrer que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ . Calculer  $P^{-1}AP$ .

3. En déduire  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

4. La matrice  $A$  est-elle inversible ?

5. On considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par : 
$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = -u_{n+2} + 5u_{n+1} - 3u_n. \end{cases}$$

(a) On pose :  $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ . Donner la relation qui lie  $X_{n+1}$ ,  $X_n$  et  $A$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

(b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $X_n = A^n X_0$ .

(c) En déduire l'expression explicite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### III Inversibilité de matrice carrée

**Exercice 10.** Étudier l'inversibilité des matrices suivantes et lorsqu'elles sont inversibles, donner leur inverse :

1.  $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

4.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

5.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

6.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

**Exercice 11.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .

Étudier l'inversibilité de  $A$  selon les valeurs prises par le paramètre  $a \in \mathbb{R}$ . Lorsque  $A$  est inversible, calculer son inverse en fonction de  $a$ .

**Exercice 12.** On considère le système 
$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

1. Écrire le système sous forme matricielle.

2. En notant  $A$  la matrice associée au système, montrer que  $A$  est inversible et calculer son inverse.

3. Résoudre le système.

**Exercice 13.** Calcul de rang :

Déterminer, en fonction de  $\lambda \in \mathbb{R}$ , le rang de  $A = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 4 & -4 \\ -1 & 5 - \lambda & -3 \\ 1 & 7 & -5 - \lambda \end{pmatrix}$ .

**Exercice 14.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2$  et l'écrire en fonction de  $A$  et de  $I_3$ .
2.  $A$  est-elle inversible? Si oui, calculer son inverse.

**Exercice 15.** Pour chacune des matrices suivantes, étudier si elle est inversible ou pas et lorsqu'elle est inversible, donner son inverse.

1.  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  vérifiant  $M^4 - 4M^2 + M - 5I_3 = 0_3$ .
2.  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $A^5 - A = 0_3$  et telle que  $A^4 \neq I_3$ .

**Exercice 16.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $(A - I_3)^2$ . En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .
2. Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  puis pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice 17.** Soient  $a, b, c, d$  des réels non tous nuls. On considère la matrice  $M = \begin{pmatrix} a & -d & c & -b \\ d & a & -b & -c \\ -c & b & a & -d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$ .

1. Calculer le produit matriciel  ${}^tM \times M$ .
2.  $M$  est-elle inversible? Si oui, calculer  $M^{-1}$ .

**Exercice 18.** Inversibilité des matrices carrées d'ordre deux.

Soit la matrice  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $M^2 = (a + d)M - (ad - bc)I_2$ .
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que  $M$  soit inversible et déterminer alors  $M^{-1}$ . On posera  $\Delta = ad - bc$ .

**Exercice 19.** Inversibilité des matrices de rotation.

Soit  $\mathcal{R}$  l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme  $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que le produit de deux éléments de  $\mathcal{R}$  est un élément de  $\mathcal{R}$ .
2. Montrer que deux matrices de  $\mathcal{R}$  commutent.
3. Montrer que  $I_2 \in \mathcal{R}$ .
4. Montrer que tout élément de  $\mathcal{R}$  est inversible et que son inverse est encore dans  $\mathcal{R}$ .

## IV Divers

**Exercice 20.** Pour toute matrice carrée  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ , on appelle trace de  $A$  le nombre :  $Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ .

1. Calculer la trace de la matrice nulle, de la matrice identité et de la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ .
2. Vérifier que  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, Tr(\lambda A + \mu B) = \lambda Tr(A) + \mu Tr(B)$ .
3. Montrer que  $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, Tr(AB) = Tr(BA)$ .
4. Les matrices  $A$  et  $B$  sont dites semblables s'il existe une matrice  $P$  inversible telle que  $B = P^{-1}AP$ . Montrer que deux matrices semblables ont même trace.

**Exercice 21.** Commutant. On cherche à déterminer le commutant de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire l'ensemble des matrices  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui vérifient :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA.$$

Cela revient à chercher les matrices  $A$  qui commutent avec toutes les autres matrices. Soit  $A$  une telle matrice.

1. Soit  $D$  une matrice diagonale d'ordre  $n$ . Expliciter  $AD$  et  $DA$  et en déduire que  $A$  est diagonale.
2. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Expliciter  $MA$  et  $AM$  et en déduire que tous les coefficients de  $A$  sont égaux.
3. Décrire le commutant de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 22.** Résolution d'équation matricielle.

Déterminer toutes les matrices  $M$  carrée d'ordre deux telles que  $M^2 = 0$ .

## V Exercices récapitulatifs

**Exercice 23.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . On cherche à étudier l'inversibilité de  $A$  et à calculer les puissances  $n$ -ièmes de  $A$  en utilisant les diverses méthodes vues en cours et en TD.

1. Méthode une : Par diagonalisation :

(a) Résoudre  $(A - \lambda I_3)X = O_{31}$ .

(b) On pose  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ .

(c) Calculer  $P^{-1}AP$ . En notant  $D$  cette matrice, exprimer  $A$  en fonction de  $P$ ,  $P^{-1}$  et  $D$ .

(d) Calculer les puissances  $n$ -ièmes de  $A$ .

(e) Étudier l'inversibilité de  $A$ . Si  $A$  est inversible, calculer son inverse.

2. Méthode deux : Par le binôme de Newton :

(a) Soit  $B = A - 2I_3$ . Calculer  $B^n$  en fonction de  $B$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

(b) En déduire alors les puissances  $n$ -ièmes de  $A$ .

3. Méthode trois : Lorsque l'on connaît une relation entre les puissances de la matrice :

(a) Montrer que :  $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3$ .

(b) Montrer qu'il existe deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on ait :  $A^n = a_n A + b_n I_3$ .

(c) Calculer les expressions explicites de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . En déduire les puissances  $n$ -ièmes de  $A$ .

(d) Montrer que  $A$  est inversible et donner son inverse en fonction de  $A$  et de  $I_3$ .

(e) En reprenant la question précédente, donner l'expression de  $A^{-n}$  en fonction de  $A$  et de  $I_3$  pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$ .