DM5

Exercice 1. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telles que :

$$f \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall t>0,\ f'(t) = f(1/t)$$

On fixe une fonction $f \in \mathcal{S}$ et on définit la fonction g par

$$g(x) = f(e^x)$$

1. Justifier que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et exprimer sa dérivée seconde en fonction de f.
2. Justifier que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que g est solution de l'équation diffrentielle suivante :
$$y'' - y' + y = 0 \quad (E)$$
3. Résoudre (E).
4. En déduire que f est de la forme
$$f(t) = A\sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) + B\sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$$
où (A,B) sont deux constantes réelles.
On appelle $f_1(t) = \sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$ et $f_2(t) = \sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$
5. Calculer les dérivées premières de f_1 et f_2
6. En considérant les cas $t=1$ et $t = e^{\pi/\sqrt{3}}$, montrer que A et B sont solutions de
$$(S)\begin{cases} A - B\sqrt{3} &= 0 \\ A\sqrt{3} - 3B &= 0 \end{cases}$$
7. Résoudre (S).
8. Conclure.

Correction 1.

1. Remarquons qu'étant donné que f est dérivable et $t \mapsto \frac{1}{t}$ est aussi dérivable, la fonction f' est dérivable par composée de fonctions dérivables. Ainsi f est dérivable deux fois sur $]0,+\infty[$ et on a
$$\boxed{f''(t) = \frac{-1}{t^2}f'(1/t) = \frac{-1}{t^2}f(t)}$$
2. La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et $exp(\mathbb{R}) =]0,+\infty[$, de nouveau par composition, g est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$.
Calculons les dérivées successives de g en fonction de celles de f :
$$g'(x) = e^x f'(e^x) \quad \text{et} \quad g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$$

On a donc

$$\begin{aligned} g''(x) - g'(x) + g(x) &= e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x) - e^x f'(e^x) + f(e^x) \\ &= e^{2x} f''(e^x) + f(e^x) \end{aligned}$$

On utilise alors la relation vérifiée par f : $f'(x) = f(1/x)$, on a par dérivation $f''(x) = \frac{-1}{x^2} f'(1/x) = \frac{-1}{x^2} f(x)$, d'où

$$f''(e^x) = \frac{-1}{e^{2x}} f(e^x) = -e^{-2x} f(e^x)$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g''(x) - g'(x) + g(x) &= -e^{2x} e^{-2x} f(e^x) + f(e^x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est donc solution de l'équation différentielle } g'' - g' + g = 0.}$$

3. Résolvons (E) avec la méthode vue en cours. Le polynôme caractéristique est $X^2 - X + 1$ qui admet comme discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ et donc deux racines complexes : $r_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Les solutions de (E) sont donc de la forme

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto e^{x/2} \left(A \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} x\right) + B \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} x\right)\right) \mid A, B \in \mathbb{R} \right\}}$$

4. On vient de voir que $f(e^x)$ est de la forme $e^{x/2}(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right))$, donc $f(t)$ est de la forme

$$f(t) = A\sqrt{t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right) + B\sqrt{t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right)$$

avec A, B deux constantes réelles. Ceci est bien la forme demandée par l'énoncé, avec

$$f_1(t) = \sqrt{t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right)$$

et

$$f_2(t) = \sqrt{t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right)$$

5. Calculons les dérivées des fonctions f_1 et f_2. On a

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{t}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right) - \sqrt{t}\frac{\sqrt{3}}{2t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{t}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{t}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right) \end{aligned}$$

De même

$$f_2'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{t}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right)$$

6. Pour $t=1$ on obtient d'une part

$$\begin{aligned} f(1) &= A\sqrt{1}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(1)\right)+B\sqrt{1}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(1)\right) \\ &= A \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} f'(1) &= Af_1'(1)+Bf_2'(1) \\ &= \frac{A}{2}+\frac{B\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Comme $f'(1)=f(1/1)=f(1)$, on obtient alors

$$A=\frac{A+B\sqrt{3}}{2}$$

donc $2A=A+B\sqrt{3}$ et finalement

$$\boxed{A-B\sqrt{3}=0}$$

C'est la première équation du système (S)
Faisons la même chose pour $t=e^{\pi/\sqrt{3}}$. Remarquons tout d'abord que

$$f'(e^{\pi/\sqrt{3}})=f(1/e^{\pi/\sqrt{3}})=f(e^{-\pi/\sqrt{3}})$$

Calculons alors les deux membres de cette égalité.

$$\begin{aligned} f(e^{-pi/\sqrt{3}}) &= Ae^{-\pi/2\sqrt{3}}\cos(-\frac{\pi}{2})+Be^{-\pi/2\sqrt{3}}\sin(-\frac{\pi}{2}) \\ &= -Be^{-\pi/2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

et

$$f_1'(e^{\pi/\sqrt{3}})=-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\pi/2\sqrt{3}}$$

$$f_2'(e^{\pi/\sqrt{3}})=\frac{1}{2}e^{-\pi/2\sqrt{3}}$$

d'où

$$f'(e^{\pi/\sqrt{3}})=-\frac{A\sqrt{3}}{2}e^{-\pi/2\sqrt{3}}+\frac{B}{2}e^{-\pi/2\sqrt{3}}$$

Finalement on obtient

$$Be^{-\pi/2\sqrt{3}}=-\frac{A\sqrt{3}}{2}e^{-\pi/2\sqrt{3}}+\frac{B}{2}e^{-\pi/2\sqrt{3}}$$

Donc

$$-B=-\frac{A\sqrt{3}}{2}+\frac{B}{2}$$

Ce qui donne alors $-2B=-A\sqrt{3}+B$ et finalement

$$\boxed{-3B + A\sqrt{3} = 0}$$

C'est la deuxième équation du système (S)

7. Le système (S) est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{lcl} A - B\sqrt{3} & = & 0 \\ \sqrt{3}(A - \sqrt{3}B) & = & 0 \end{array}\right. \iff A - B\sqrt{3} = 0$$

Le système admet alors une infinité de solutions de la forme

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(B\sqrt{3}, B) \mid B \in R\}}$$

8. On en déduit que f est de la forme

$$f(t) = B\sqrt{3}f_1(t) + Bf_2(t)$$

où B est une constante réelle.
Il faut maintenant vérifier que les fonctions de cette forme sont bien solutions de notre problème.
f est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$f'(t) = \frac{B\sqrt{3}}{\sqrt{t}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) - \frac{B}{\sqrt{t}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$$

D'autre part $f(1/t) = B\sqrt{3}f_1(1/t) + Bf_2(1/t)$
Et on a

$$\begin{aligned} f_1(1/t) &= \frac{1}{\sqrt{t}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(1/t)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) \end{aligned}$$

De même on obtient

$$f_2(1/t) = -\frac{1}{\sqrt{t}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$$

par imparité de la fonction sin
Ainsi

$$f(1/t) = B\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{t}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) - B\frac{1}{\sqrt{t}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) = f'(t)$$