

Chapitre 12 : Dénombrement

I Cardinal d'un ensemble fini

I. 1 Définition

- Définition 1.**
- Soit E un ensemble fini comportant n éléments. On dit alors que E est de cardinal n et on note $\text{Card}(E) = n$.
 - L'ensemble vide est un ensemble fini et son cardinal est $\text{Card}(\emptyset) = 0$.
 - Un singleton est un ensemble E vérifiant $\text{Card}(E) = 1$.

 Ne pas confondre le nombre d'éléments et la "dimension" des objets à l'intérieur de l'ensemble. ex $E = \{(1, 2, 3), (3, 4, 0)\}$ est un ensemble à 2 éléments :

1. $(1, 2, 3)$
2. $(3, 4, 0)$

Chaque élément est une liste contenant 3 nombres. 

Exemple 1. OG n'a réussi à corriger que le quart de la moitié de son paquet de 48 copies. Quel est le cardinal de l'ensemble des copies restantes ?

I. 2 Cardinal d'une union

Proposition 2. Deux ensembles A et B sont disjoints lorsque $A \cap B = \emptyset$ On a alors :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$$

Exercice 3. On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. Quel est le nombre N de possibilités d'obtenir un 7 ou une figure ?

Proposition 4. Des ensembles finis A_1, A_2, \dots, A_n sont deux à deux disjoints lorsque

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$$

On a alors :

$$\text{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n \text{Card}(A_k)$$

 Ne pas confondre des ensembles deux à deux disjoints et l'intersection de tous les ensembles est vide.

Proposition 5. Soient A et B deux ensembles finis alors

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

I. 3 Cardinal d'un complémentaire

Proposition 6. Soit A un sous ensemble d'un ensemble fini E .

On note \bar{A} son complémentaire dans E . Alors :

$$\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$$

Remarque. Penser au complémentaire dès que il y a : "au moins" dans l'énoncé.

Exercice 7. Dans un centre de vacances, il y a 50 personnes plus ou moins sportives et de nombreuses activités leur sont proposées : 15 personnes font du tennis, 20 de la piscine, 30 du volley-ball, 10 du tennis de table, 5 du cheval et 4 restent allongées au bord de la piscine toute la journée. Combien de personnes pratiquent au moins un sport ?

I. 4 Cardinal d'un produit cartésien

Définition 8. Rappels sur le produit cartésien :

- Soient A et B deux ensembles. On note :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

et on a

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$$

- Soit E un ensemble, on note :

$$E^p = \{(e_1, e_2, \dots, e_p) \mid e_i \in E\}$$

et on a

$$\text{Card}(E^p) = \text{Card}(E)^p$$

Exemple 2. Calcul du cardinal de $A \times B$ avec $A = \{2, 6, 8\}$ et $B = \{1, 3, 5, 6, 8\}$:

Exercice 9. On tire successivement 2 cartes d'un jeu de 32 cartes.

1. Quel est le nombre N de possibilités d'obtenir un roi suivi d'une dame ?
2. On tire maintenant successivement 4 cartes du même jeu. Quel est le nombre M de possibilités d'obtenir dans l'ordre un as, un roi, une dame, et un valet ?

I. 5 Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble

Définition 10. Soit E un ensemble.

- On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E On a

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$$

Exemple 3. Calculer le nombre de parties des ensembles précédents.

I. 6 Cardinal et applications

Proposition 11. Soient E et F deux ensembles finis.

- Il existe une injection entre E et F ssi $\text{Card}(E) \leq \text{Card}(F)$
- Il existe une surjection entre E et F ssi $\text{Card}(E) \geq \text{Card}(F)$
- Il existe une bijection entre E et F ssi $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$

II Choix de p objets parmi n

La plupart des exercices de dénombrement peuvent se ramener au cas de tirages de p éléments parmi les n éléments d'un ensemble E . Il y a alors essentiellement quatre façons différentes de tirer p éléments parmi n :

- Avec ordre et répétition (n^p) (Nombre de codes secrets de carte bleue)
- Avec ordre et sans répétition, $\frac{n!}{(n-p)!}$ (Nombre de possibilités au tiercé)
- Sans ordre et sans répétition, $\binom{n}{p}$ (nombre de possibilités au loto)
- Sans ordre et avec répétition. (plus rare et compliqué)

II. 1 Choix successifs

II. 1. a Listes avec répétitions éventuelles (avec ordre et répétition)

Définition 12. Soit E un ensemble de cardinal fini n .

Une p -liste de E est un élément de E^p

Exemple 4. Soit $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.

Donner une 2-liste de E : et une 5-liste de E :

Remarque.  Ne pas confondre p -liste avec ensemble à p éléments. Dans une p -liste, l'ordre est important et si on change l'ordre, on change la p -liste. Dans un ensemble à p éléments, l'ordre n'intervient pas et l'ensemble est toujours le même lorsque l'on intervertit des éléments.

Exemple avec les points de coordonnées $(2, 3)$ et $(3, 2)$:

Proposition 13. Avec ordre et répétition :

Le nombre de façons de choisir p objets pris parmi n objets distincts avec répétition possible et avec ordre est n^p c'est-à-dire $\text{Card}(E^p)$

Exemples. • **Exemple fondamental : Tirage successif avec remise**

Soient une urne contenant n boules différentes et un entier p . On tire successivement p boules dans l'urne, on note le numéro de la boule tirée à chaque fois et l'on remet la boule dans l'urne. Le nombre de résultats possibles d'un tel tirage est

- Nombre de façons de ranger 2 chemises de couleurs différentes dans 3 tiroirs discernables :
- Nombre de mots de 5 lettres écrits avec les lettres A,B,C,D,E et F :
- Nombre de répartitions possibles de 5 billes différentes dans 10 boîtes distinctes avec 0, 1 ou plusieurs billes par boîte :

II. 1. b Listes sans répétition (avec ordre et sans répétition)

Définition 14. Soit E un ensemble de cardinal fini n .
Une p -liste de E sans répétition (ou arrangement de p éléments de E) est

Exemple 5. Soit $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.

Donner une 5-liste sans répétition de E :

Remarque. Pour qu'il n'y ait pas de répétition, il faut nécessairement que l'on ait

Proposition 15. Avec ordre et sans répétition :
Le nombre de façons de choisir p objets pris parmi n objets distincts sans répétition possible et avec ordre est
c'est-à-dire :

Remarque. On utilise parfois la notation \mathcal{A}_n^p (pour "arrangement") pour désigner le nombre de p -listes sans répétition d'un ensemble à n éléments. Ainsi, on a $\mathcal{A}_n^p = \dots$
Par convention, on pose $\mathcal{A}_n^0 = 1$ et $\mathcal{A}_n^p = 0$ si $p > n$.

Exemples. • **Exemple fondamental : Tirage successif sans remise**

Soient une urne contenant n boules différentes et un entier p . On tire successivement et sans remise p boules dans l'urne. Le nombre de résultats possibles d'un tel tirage est

- Nombre de répartitions possibles de 5 billes différentes dans 10 boîtes distinctes avec au plus une bille par boîte :
- Nombre de paris possibles au tiercé dans une course où 15 chevaux sont en compétition :
- Nombre de mots de 3 lettres distinctes avec les lettres A,B,C et D :

Définition 16. Soit E un ensemble fini à n éléments.
On appelle permutation de E

Exemple 6. Soit $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.

Donner un exemple de permutation de E :

Donner un exemple de 7-liste de E qui n'est pas une permutation :

Proposition 17. Soit E un ensemble fini de cardinal n . Le nombre de permutations de E est

Exercice 18. Nombre de permutations de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$? de $\llbracket 1, 6 \rrbracket$?

II. 2 Choix simultanés

II. 2. a Combinaisons (sans ordre et sans répétition)

Définition 19. Soient E un ensemble fini de cardinal n .
On appelle combinaison de p éléments pris parmi n éléments de E

Exemple 7. Soit $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.

Donner une combinaison à 5 éléments de E :

Remarque. On doit nécessairement avoir

Proposition 20. Sans ordre et sans répétition :
Le nombre de façons de choisir p objets pris parmi n objets distincts sans répétition possible et sans ordre est
c'est-à-dire :

Exemples. • **Exemple fondamental : Tirage simultané non ordonné**

Soient une urne contenant n boules différentes et un entier p . On tire simultanément p boules.
Le nombre de résultats possibles d'un tel tirage est

- Nombre de répartitions possibles de 5 billes identiques dans 10 boîtes distinctes avec au plus une bille par boîte :

Exercice 21. Jeu de cartes : on distribue 5 cartes d'un jeu de 32 cartes à un joueur, celui-ci dispose donc d'une main de 5 cartes.

1. Déterminer le nombre de mains possibles.
2. Déterminer le nombre de mains contenant exactement 2 coeurs.
3. Déterminer le nombre de mains contenant exactement 2 cartes de pique, 2 cartes de coeur et 1 carte de carreau.

Exercice 22. Formule des "chefs" : un sélectionneur de foot doit choisir k joueurs parmi n candidats, et désigner un capitaine parmi les joueurs. En comptant de deux façons différentes le nombre de possibilités, redémontrer la formule des "chefs".

II. 2. b Choix sans ordre et avec répétition

Ce cas là est plus rare mais il apparaît parfois. On verra quelques exemples en TD.

Exemple 8. On considère 5 boules indiscernables que l'on veut placer dans 3 tiroirs distincts, chaque tiroir pouvant contenir de 0 à 5 boules. Donner le nombre de répartitions possibles.

