Correction TD - 12 : Dénombrement

I Dénombrement

Correction 1. Anagrammes d'ANANAS :

- Méthode 1 :
  On commence par compter le nombre de permutations des lettres comme si elles étaient toutes distinctes : on obtient alors 6! anagrammes possibles. Il faut alors compter le nombre de fois où l'on a compté plusieurs fois le même mot : 3! permutations pour les A, et 2! permutations pour les N. Finalement on obtient : $\boxed{\dfrac{6!}{3!2!} = 60}$ anagrammes différents.
- Méthode 2 :
  On essaye de remplir les 6 emplacements lettres par lettres (comme au jeu du pendu). Commençons par choisir la place des A : on doit choisir 3 emplacements parmi 6, et ce sans ordre (car l'ordre des A n'a pas d'importance, ce sont les mêmes lettres), et sans répétition car on ne peut pas placer deux lettres sur le même emplacement. On a donc des combinaisons de 3 lettres parmi 6 emplacements, soit $\binom{6}{3}$ possibilités. On doit ensuite placer les 2 N parmi les 3 emplacements restants, on a donc $\binom{3}{2}$ possibilités. Enfin, il ne reste qu'une possibilité pour la place du S. Ainsi, on a $\boxed{\binom{6}{3} \times \binom{3}{2} = 60}$ possibilités.

Correction 2. Rangement de billes dans des boîtes :
Exercice très classique qui correspond à la répartition de billes dans des boîtes distinctes selon que les billes sont différentes ou non et que les boîtes peuvent contenir plusieurs billes ou non.

1. Comme les prospectus sont tous identiques, l'ordre dans lequel on les distribue dans les boîtes n'intervient pas. De plus, comme les boîtes ne peuvent pas contenir plus d'un prospectus, il n'y a pas de répétition possible. Ainsi, on est dans un cas où l'on doit choisir les 7 boîtes aux lettres qui vont contenir un prospectus parmi 10 boîtes aux lettres, ce choix se faisant sans ordre et sans répétition. Il y a donc $\binom{10}{7}$ façons de le faire.
2. Ici les prospectus sont tous différents et on peut par exemple imaginer qu'ils sont empilés selon un certain ordre (prospectus alimentaire puis bancaire...). Ici, lorsque vous allez choisir les boîtes aux lettres dans lesquelles vous allez mettre vos prospectus, l'ordre dans lequel vous choisissez vos boîtes à lettre intervient car tous les prospectus sont différents. Cela ne va donc pas donner le même résultat si vous choisissez d'abord la boîte aux lettres numéro 3 (qui reçoit donc le prospectus alimentaire) puis la boîte aux lettres numéro 6 (qui reçoit donc le prospectus bancaire) ou si vous choisissez d'abord la boîte aux lettres numéro 6 (qui reçoit donc le prospectus alimentaire) puis la boîte aux lettres numéro 3 (qui reçoit donc le prospectus bancaire). De plus, comme chaque boîte ne peut pas en recevoir plus d'un, il n'y a pas de répétition possible. Il s'agit donc de choisir 7 boîtes aux lettres parmi 10 en tenant compte de l'ordre et pas de répetition. On a donc $\dfrac{10!}{(10-7)!} = \dfrac{10!}{3!}$ façons de faire (ou alors 10 choix pour la première boîte aux lettres choisie, puis 9 choix pour la seconde boîte aux lettres choisie...).
3. Ici, il s'agit de choisir 7 boîtes aux lettres parmi 10 avec cette fois-ci à la fois de l'ordre mais aussi des répétitions car on peut mettre plusieurs prospectus dans chaque boîte aux lettres. On est dans le cas où il y a à la fois de l'ordre et des répétitions. Le nombre de façons de faire correspond aux nombres de $7-$uplet d'éléments pris parmis 10 avec répétitions possibles. Il y a donc 10^7 façons de faire. Une autre façon de voir

les choses est la suivante : on a 10 choix possibles pour le premier prospectus, 10 choix possibles pour le deuxième prospectus... et 10 choix pour le 7-ième prospectus. Ainsi, on a bien 10^7 façons de faire.

4. Là, on est dans un cas où il n'y a pas d'ordre : en effet, les prospectus étant tous identiques, l'ordre dans lequel on les distribue n'intervient pas. Par contre il y a de la répétition car plusieurs prospectus peuvent être mis dans la même boîte aux lettres. Ici, la seule façon de faire est de considérer les 7 prospectus et de rajouter les 9 séparations entre les 10 boîtes aux lettres. On a donc en tout 16 emplacements possibles et il faut choisir la place des 9 séparations parmi ces 16 places, sans ordre (les séparations sont identiques) et sans répétition (un seul objet par emplacement). On obtient ainsi $\binom{16}{9}$ façons de faire.

Correction 3. Tirage de jetons dans une urne

1. On est dans un cas où l'ordre et la répétition interviennent puisque les jetons sont tirés successivement et avec remise.
   (a) A chaque tirage, on a 13 choix : 13 choix pour le premier tirage, 13 choix pour le second... Ainsi, on obtient 13^6 résultats possibles.
   (b) i. Pour obtenir exactement un jeton noir, on doit : choisir à quel tirage on va tirer le jeton noir : il y a 6 choix possibles. Ensuite pour chaque choix de numéro de tirage, on a : 8 choix possibles de jetons noirs et pour les 5 autres tirages, on a 5 possibilités à chaque fois (5 jetons blancs). Ainsi, on obtient : $6 \times 8 \times 5^5$ résultats possibles.
      ii. On passe à l'ensemble complémentaire. Si on note A l'ensemble des tirages avec au moins un jeton noir et E l'ensemble des tirages possibles, on a : $\text{Card}(A) = \text{Card}(E) - \text{Card}(\overline{A})$. Et $\overline{A}$ est l'ensemble des tirages sans aucun jeton noir. On a donc $\text{Card}(\overline{A}) = 5^6$: à chaque tirage, on a 5 choix de jetons (les 5 jetons blancs) et il y a 6 tirages ordonnés. Ainsi, on obtient $\text{Card}(A) = 13^6 - 5^6$.
      iii. On note A l'ensemble des tirages avec au plus un jeton noir. C'est l'union disjointe de B l'ensemble des tirages avec exactement aucun jeton noir et de C l'ensemble des tirages avec exactement un jeton noir. Or on a déjà vu que : $\text{Card}(B) = 5^6$ et $\text{Card}\, C = 6 \times 8 \times 5^5$. Ainsi, on obtient que : $\text{Card}(A) = \text{Card}(B) + \text{Card}(C) = 5^6 + 6 \times 8 \times 5^5$.
      iv. Pour avoir 2 fois plus de jetons noirs que de blancs avec 6 tirages, la seule solution est de tirer 2 jetons blancs et 4 jetons noirs. On commence par fixer la place des 2 jetons blancs parmi les 6 tirages : $\binom{6}{2}$. Les jetons noirs étant alors placés dans les places restantes. Puis il y a 5^2 choix pour les jetons blancs et 8^4 choix possibles pour les jetons noirs. On obtient au final $\binom{6}{2} \times 5^2 \times 8^4$ résultats possibles.
2. On est dans un cas où l'ordre intervient mais où il n'y a pas répétition puisque les jetons sont tirés successivement et sans remise.
   (a) Il s'agit donc ici de choisir 6 jetons parmi 13 jetons avec ordre et sans remise, on obtient donc des 6 listes sans répétition, soit $\frac{13!}{(13-6)!} = \frac{13!}{7!}$. Une autre façon de le voir est de dire : pour le premier tirage, j'ai 13 choix, pour le deuxième tirage, j'ai 12 choix... et pour le dernier tirage, j'ai 8 choix. Ainsi, on a : $13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = \frac{13!}{7!}$ résultats possibles.
   (b) i. Pour obtenir exactement un jeton noir, on doit : choisir à quel tirage on va tirer le jeton noir : il y a 6 choix possibles. Ensuite pour chaque choix de numéro de tirage, on a : 8 choix possibles de jetons noirs et pour les 5 autres tirages, on doit choisir 5 jetons parmi 5 sans remise mais avec ordre : $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$. Ainsi, on obtient : $6 \times 8 \times 5!$ résultats possibles.
      ii. On passe à l'ensemble complémentaire. Si on note A l'ensemble des tirages avec au moins un jeton noir et E l'ensemble des tirages possibles, on a : $\text{Card}(A) = \text{Card}(E) - \text{Card}(\overline{A})$. Et $\overline{A}$ est l'ensemble des tirages sans aucun jeton noir. On a donc $\text{Card}(\overline{A}) = 0$. En effet, comme il n'y a pas de remise et que l'on fait 6 tirages alors qu'il n'y a que 5 jetons blancs, il n'y a aucun tirage sans jeton noir. Ainsi, on obtient $\text{Card}(A) = \text{Card}(E) = \frac{13!}{7!}$.
      iii. On note A l'ensemble des tirages avec au plus un jeton noir. C'est l'union disjointe de B l'ensemble des tirages avec exactement aucun jeton noir et de C l'ensemble des tirages avec exactement un

jeton noir. Or on a déjà vu que : $\text{Card}(B) = 0$ et $\text{Card}\, C = 6 \times 8 \times 5!$. Ainsi, on obtient que : $\text{Card}(A) = \text{Card}(C) = 6 \times 8 \times 5!$.

iv. Pour avoir 2 fois plus de jetons noirs que de blancs avec 6 tirages, la seule solution est de tirer 2 jetons blancs et 4 jetons noirs. On commence par fixer la place des 2 jetons blancs parmi les 6 tirages : $\binom{6}{2}$. Les jetons noirs étant placés dans les places restantes. Puis il y a 5×4 choix pour les jetons blancs et $8 \times 7 \times 6 \times 5$ choix possibles pour les jetons noirs. On obtient au final $\binom{6}{2} \times 5 \times 4 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$ résultats possibles.

3. On est alors dans un cas où il n'y a ni ordre ni répétition car les jetons sont tirés simultanément.

   (a) Il s'agit donc de choisir 6 jetons parmi 13 jetons sans ordre et sans répétition. On obtient donc $\binom{13}{6}$ résultats possibles.

   (b) i. On doit choisir 1 jeton noir parmi les 8 et 5 jetons blancs parmi les 5. En fait la poignée de jetons que vous devez obtenir doit contenir les 5 jetons blancs et un jeton noir. On a donc 8 résultats possibles ce qui est bien égal à $\binom{8}{1} \times \binom{5}{5}$.

   ii. On passe à l'ensemble complémentaire. Si on note A l'ensemble des tirages avec au moins un jeton noir et E l'ensemble des tirages possibles, on a : $\text{Card}(A) = \text{Card}(E) - \text{Card}(\overline{A})$. Et $\overline{A}$ est l'ensemble des tirages sans aucun jeton noir. On a donc $\text{Card}(\overline{A}) = 0$. En effet, comme il n'y a pas de remise et que l'on tire 6 jetons alors qu'il n'y a que 5 jetons blancs, il n'y a aucun tirage sans jeton noir. Ainsi, on obtient $\text{Card}(A) = \text{Card}(E) = \binom{13}{6}$.

   iii. On note A l'ensemble des tirages avec au plus un jeton noir. C'est l'union disjointe de B l'ensemble des tirages avec exactement aucun jeton noir et de C l'ensemble des tirages avec exactement un jeton noir. Or on a déjà vu que : $\text{Card}(B) = 0$ et $\text{Card}\, C = 8$. Ainsi, on obtient que : $\text{Card}(A) = \text{Card}(C) = 8$.

   iv. Pour avoir 2 fois plus de jetons noirs que de blancs avec 6 tirages, la seule solution est de tirer 2 jetons blancs et 4 jetons noirs. On obtient donc $\binom{5}{2} \times \binom{8}{4}$ résultats possibles.

Correction 4. Rangement de billes dans des boîtes :

On est dans le cas classique où il faut répartir 8 objets (différents ou distincts) parmi 13 singes distincts (ou boîtes), chaque singe pouvant en avoir soit 0 ou 1 ou plusieurs.

1. (a) Les fruits sont différents donc le choix de nos singes se fait avec ordre. Et il n'y a pas de répétitions possibles dans le choix des singes car chaque singe peut recevoir au plus un fruit. On doit donc compter le nombre de 8-listes parmi les 13 singes, donc il y a $\frac{13!}{(13-8)!} = \frac{13!}{5!}$ distributions possibles.

   (b) Les fruits sont différents donc le choix de nos singes se fait avec ordre. Et il y a des répétitions possibles dans le choix des singes car chaque singe peut recevoir 0, 1 ou plusieurs fruits. On doit donc compter le nombre de 8-listes avec répétition parmi les 13 singes, donc il y a 13^8 distributions possibles.
   On peut aussi refaire le raisonnement : j'ai 13 choix pour la banane, 13 choix pour la pomme, 13 choix pour la poire...en tout, j'ai donc 13^8 distributions possibles.

2. (a) Les fruits sont tous identiques donc le choix de nos singes se fait sans ordre. Et il n'y a pas de répétitions possibles dans le choix des singes car chaque singe peut recevoir au plus un fruit. On doit compter le nombre de combinaisons de 8 singes parmi 13, donc il y a $\binom{13}{8}$ distributions possibles.

   (b) Les fruits sont tous identiques donc le choix de nos singes se fait sans ordre. Et il y a des répétitions possibles dans le choix des singes car chaque singe peut recevoir 0, 1 ou plusieurs fruits. On est dans le cadre du choix de 8 singes parmi les 13 singes et ce choix se fait sans ordre et avec répétition. La seule manière de modéliser cela est de rajouter à nos 8 fruits identiques 12 séparations entre les singes. On a donc en tout 20 emplacements différents possibles et il faut choisir la place des 12 séparations parmi ces 20 places disponibles sans ordre (les séparations sont identiques) et sans répétition (un seul objet par séparation). On a donc $\binom{20}{12}$ distributions possibles.

Correction 5. Tirage de boules dans une urne

1. On est dans un cas où il y a ordre et répétition. Un résultat est un 6-uplet de boules pris dans un ensemble de 13 boules. On a donc 13 choix pour le premier tirage, 13 choix pour le second tirage... et ainsi on obtient 13^6 résultats possibles.
2. (a) On a 5 choix possibles pour le premier tirage, 5 choix possibles pour le second tirage,..., puis 5 choix possibles pour le cinquième tirage et 8 choix possibles pour le dernier tirage. Au final, on obtient $5^5 \times 8$ résultats possibles.
   (b) Pour obtenir exactement une boule noire, on doit : choisir à quel tirage on va tirer la boule noire : il y a 6 choix possibles. Ensuite pour chaque choix de numéro de tirage, on a : 8 choix possibles de boules noires et pour les 5 autres tirages, on a 5 possibilités à chaque fois (5 boules blanches). Ainsi, on obtient : $6 \times 8 \times 5^5$ résultats possibles.
   (c) On passe à l'ensemble complémentaire. Si on note A l'ensemble des tirages avec au moins une boule noire et E l'ensemble des tirages possibles, on a : $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(\overline{A})$. Et $\overline{A}$ est l'ensemble des tirages sans aucune boule noire. On a donc $\mathrm{Card}(\overline{A}) = 5^6$: à chaque tirage, on a 5 choix de boules (les 5 boules blanches) et il y a 6 tirages ordonnés. Ainsi, on obtient $\mathrm{Card}(A) = 13^6 - 5^6$.
   (d) On considère que l'on veut strictement plus de boules noires que blanches. C'est donc la réunion disjointe de 0 boule blanche et 6 boules noires ou 1 boule blanche et 5 boules noires ou 2 boules blanches et 4 boules noires. On obtient ainsi : $8^6 + 6 \times 5 \times 8^5 + \binom{6}{2} \times 5^2 \times 8^4$.

Correction 6. Jeu de cartes :

1. On est dans un cas où il n'y a pas d'ordre ni de répétition. Il s'agit donc de choisir 8 cartes parmi 52 sans ordre ni répétition. On obtient donc $\binom{52}{8}$ mains différentes.
2. Une solution est de passer par le complémentaire. Si on pose A : ensemble des mains possibles avec au moins un as et E : ensemble des mains possibles. On obtient : $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(\overline{A})$. De plus, on a : $\overline{A}$: ensemble des mains possibles sans aucun as et ainsi il s'agit de choisir 8 cartes non plus parmi 52 mais parmi 48 car on enlève les 4 as. On obtient ainsi : $\mathrm{Card}(A) = \binom{52}{8} - \binom{48}{8}$.
3. Là encore on peut passer par l'ensemble complémentaire. Si on pose B : ensemble des mains possibles avec au moins (un coeur ou une dame) et E : ensemble des mains possibles. On obtient : $\mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(\overline{B})$. De plus, on a : $\overline{B}$: ensemble des mains possibles sans coeur et sans dame et ainsi il s'agit de choisir 8 cartes non plus parmi 52 mais parmi 36 car on enlève les 13 coeurs et les 3 dames restantes. On obtient ainsi : $\mathrm{Card}(A) = \binom{52}{8} - \binom{36}{8}$.
4. Il faut faire attention à l'as de coeur. On note C : l'ensemble des mains possibles avec exactement un as et exactement un coeur mais sans l'as de coeur, D l'ensemble des mains possibles avec l'as de coeur et aucun coeur et as pour les autres cartes et E l'ensemble des mains possibles avec exactement un as et un coeur. On a bien $E = C \cup D$ et les deux ensembles C et D sont bien disjoints. Ainsi, on obtient $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(C) + \mathrm{Card}(D)$. Le cardinal de C s'obtient en choisissant une carte parmi les 3 as ne contenant pas l'as de coeur, une carte parmi les 12 cartes de coeur sans l'as de coeur et les 6 cartes restantes parmi les 36 cartes restantes n'étant ni des coeur ni des as. On a donc : $\mathrm{Card}(C) = \binom{3}{1}\binom{12}{1}\binom{36}{6}$. Pour D, il faut prendre l'as de coeur, soit une seule possibilité, puis il faut prendre les 7 cartes restantes parmi les 36 autres cartes n'étant ni des coeurs ni des as. On obtient ainsi $\mathrm{Card}(D) = 1 \times \binom{36}{7}$. Ainsi, on a : $\mathrm{Card}(E) = \binom{3}{1}\binom{12}{1}\binom{36}{6} + \binom{36}{7}$.
5. On commence par faire le choix de la couleur, on a donc 2 choix parmi 4 sans ordre et sans répétition : $\binom{4}{2}$. Une fois le choix de la couleur fait, il faut prendre nos 8 cartes parmi les cartes de ces deux couleurs à savoir on doit prendre 8 cartes parmi les 26 cartes des deux couleurs choisies. On a compté en trop le cas où nos 8

cartes étaient en fait toutes prises de la même couleur. Il faut donc retirer à $\binom{26}{8}$ le nombre de possibilités que l'on a d'avoir pris en fait 8 cartes de la même couleur, à savoir : $2 \times \binom{13}{8}$. On le compte 2 fois car il y a deux couleurs. Finalement, on obtient : $\binom{4}{2}\left[\binom{26}{8} - 2\binom{13}{8}\right]$.

6. On veut choisir au plus deux couleurs, c'est-à-dire exactement une ou bien exactement deux. On a calculé le nombre de tirages avec exactement deux couleurs à la question précédente. De plus, pour choisir des cartes d'une seule couleur, on a 4 choix pour la couleur, puis $\binom{13}{8}$ possibilités pour les tirages. Comme les tirages d'une couleur et de deux couleurs sont disjoints, le cardinal de l'union des deux ensembles est la somme des cardinaux, et on en déduit que l'on a $\binom{4}{2}\left[\binom{26}{8} - 2\binom{13}{8}\right] + 4\binom{13}{8}$ possibilités.
7. On commence par faire le choix de la plus petite carte : on a 6 choix pour la valeur de la plus petite carte : du 2 au 7. Une fois ce choix fait, cela détermine le choix des 8 autres valeurs puisque les valeurs doivent se suivrent strictement. Par exemple, si la plus petite carte est un 4 ensuite on doit avoir un 5,6,7,8,9,10,Valet. Puis, comme il y a 4 couleurs par valeur, on obtient finalement : $\binom{6}{1} \times 4^8$.

Correction 7. Paires de chaussures :

1. Il y a 20 chaussures en tout (on considère que toutes les chaussures sont distinctes même les chaussures de la même couleur) et on en prend 2. Il n'y a pas d'ordre ni de répétition et on a : $\binom{20}{2}$ tirages possibles.
2. Si on note E l'ensemble des tirages où l'on obtient deux chaussures de la même couleur, on a : $E = E_N \cup E_M \cup E_B$ avec E_N ensemble des tirages avec 2 chaussures de la couleur noire et pareil pour E_M et E_B. Comme il y a respectivement 10 chaussures noires, 6 chaussures marrons et 4 chaussures blanches et que ces trois ensembles E_N, E_M et E_B sont des ensembles disjoints, on obtient
$$\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(E_N) + \mathrm{Card}(E_M) + \mathrm{Card}(E_B) = \binom{10}{2} + \binom{6}{2} + \binom{4}{2}.$$
3. On fait le choix d'une chaussure de pied droit par exemple et à chaque choix fait, on fait le choix d'une chaussure de pied gauche. On obtient alors : $\binom{10}{1}\binom{10}{1} = 10 \times 10 = 100$.
4. Si on note A l'ensemble des tirages où l'on obtient deux chaussures de la même couleur avec une chaussure droite et une chaussure gauche, on a : $A = A_N \cup A_M \cup A_B$ avec A_N ensemble des tirages avec 2 chaussures de la couleur noire avec une chaussure droite et une chaussure gauche et pareil pour A_M et A_B. Ainsi, on obtient
$$\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(A_N) + \mathrm{Card}(A_M) + \mathrm{Card}(A_B) = 5 \times 5 + 3 \times 3 + 2 \times 2.$$

Correction 8. Tournoi de tennis

1.
   - Une façon de voir les choses est de se dire que l'on compte le nombre de façons de classer tous les joueurs : on ordonne tous les joueurs de tennis du tournoi : il y a donc de l'ordre et pas de répétition possible et on a $(2n)!$ possibilités. Ensuite pour faire les matchs, on regroupe tous les joueurs ordonnés par paire : le 1 joue contre le 2, le 3 joue contre le 4.... Ici, pour chaque match, on a compté comme 2 possibilités : Bertrand joue contre Fred et Fred joue contre Bertrand. Donc il faut diviser par 2^n car il y a n matchs. Ainsi, on obtient : $\frac{(2n)!}{2^n}$ organisations possibles du premier tour.
   - Une autre façon de voir les choses est la suivante : on choisit d'abord 2 joueurs parmi les $2n$ joueurs pour jouer le match numéro 1, puis 2 autres joueurs parmi les joueurs restants, à savoir parmi les $2n-2$ joueurs restants, puis encore 2 autres joueurs parmi les $2n-4$ joueurs restant....chaque choix de 2 joueurs parmi les joueurs restants se fait sans répétition et sans ordre car le match est le même si on commence par choisir M.X puis M.Y ou si on commence par choisir M.Y puis M.X : ainsi l'ordre n'intervient pas.

Ainsi, le choix des 2 joueurs se fait sans ordre et sans répétition donc des combinaisons à 2 éléments. Finalement, on obtient
$$\binom{2n}{2} \times \binom{2n-2}{2} \times \binom{2n-4}{2} \dots \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}.$$
Si on écrit les coefficients binomiaux sous forme de factorielle, il y a beaucoup de simplifications et on obtient bien le même résultat, à savoir : $\dfrac{(2n)!}{2^n}$.

2. Si l'ordre des matchs n'est plus pris en compte, il faut en plus diviser par le nombre de permutations possibles des matchs, à savoir $n!$. On obtient alors $\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

Correction 9. Sudoku

On commence par numéroter les différents pions. Si $p > n$, il n'y a pas de manière possible. Si $p \leq n$, on a : on prend le jeton numéroté 1, il y a n^2 places possibles. Le premier jeton étant placé, cela supprime toute une ligne et toute une colonne entière et il y a donc $(n-1)^2$ places possibles pour le deuxième jeton....on continue ainsi jusqu'au jeton numéro p. On obtient ainsi
$$N = n^2(n-1)^2 \dots (n-p+1)^2.$$
Mais il faut ensuite supprimer l'ordre que l'on a mis en numérotant les jetons : à toute disposition NON numérotée correspond $p!$ dispositions numérotées (le nombre de façons de permuter les p jetons). Ainsi, on obtient $\dfrac{N}{p!} = \dfrac{n^2(n-1)^2 \dots (n-p+1)^2}{p!}$.

Correction 10. Nombre d'appels à M. X

1. On commence par choisir les k positions des appels à M. X : on doit donc choisir k places parmi les n places : $\binom{n}{k}$ choix possibles. Une fois que le choix des appels de M. X est fait, pour les autres appels, on a le choix de $N-1$ individus (car on ne peut pas appeler M. X) et il y a de l'ordre et de la répétition. Ainsi, pour chaque appel, on a $N-1$ choix et cela pour les $n-k$ appels restantes. Finalement, on obtient : $\boxed{\binom{n}{k}(N-1)^{n-k}}$ résultats où M. X est appelé k fois.
2. On commence ici par faire le choix des k places où M. X a été appelé parmi les r premiers appels, à savoir $\binom{r}{k}$. Pour les $r-k$ autres appels compris dans les r premiers appels, on ne doit plus rappeler M. X et ainsi, on a $(N-1)^{r-k}$ choix. Ensuite pour tous les appels après le r-ième appel, on peut faire le choix d'un individu quelconque d'où N^{n-r} choix possibles. Au final, on obtient $\boxed{\binom{r}{k}(N-1)^{r-k}N^{n-r}}$ résultats où M. X est appelé k fois au cours des r premiers appels.
3. Il faut que M. X ait été appelé $k-1$ fois au cours des $t-1$ premiers appels, puis qu'on l'appelle au t-ième appel, et ensuite qu'on appelle n'importe quel individu. En raisonnant comme précedemment, on obtient $\boxed{\binom{t-1}{k-1}(N-1)^{t-k}N^{n-t}}$ résultats où M. X est appelé pour la k-ième fois au t-ième appel.

Correction 11. Codes :

1. Ici, l'ordre intervient et des répétitions sont possibles. Ainsi, on obtient 3 choix pour la lettre et pour chaque lettre choisie, on obtient ensuite une 3-liste prise parmi les 9 chiffres. Ainsi le nombre de codes différents est : 3×9^3.

2. (a) Ici l'ordre intervient toujours mais il n'y a pas de répétition possible car les 3 chiffres doivent être distincts. On compte donc le nombre de 3-listes sans répétition parmi les 9 chiffres, et on obtient $3 \times (9 \times 8 \times 7)$ codes différents lorsque les trois chiffres sont distincts.
   (b) On note A l'ensemble des codes contenant au moins le chiffre 7. On a : $\text{Card}(A) = 3 \times 9^3 - \text{Card}(\overline{A})$. Et ici, $\overline{A}$ est l'ensemble des codes ne contenant pas le chiffre 7. Ainsi, on a : $\text{Card}(\overline{A}) = 3 \times 8^3$ et
   $$\text{Card}(A) = 3 \times 9^3 - 3 \times 8^3.$$
   (c) Tous les chiffres doivent être pairs donc il s'agit de ne prendre que les chiffres 2, 4, 6 et 8. Ainsi, on obtient, comme il y a toujours de l'ordre et des répétitions possibles : 3×4^3.
   (d) On cherche le nombre de façons de choisir 3 chiffres parmi 9 :
   - sans ordre, puisqu'une fois les nombres choisis, l'ordre est imposé : les chiffres doivent être entrés dans l'ordre croissant (donc que l'on choisisse $1, 2$ puis 3 ou 3, 2, puis 1, cela revient au même, dans tous les cas on rentrera 1, 2, 3 pour le code),
   - sans répétition, car comme l'ordre doit être strict, les nombres doivent distincts.

   On cherche donc le nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 9, on obtient donc $\binom{9}{3}$ possibilités pour les chiffres. En ajoutant les 3 choix possibles pour les lettres, on a donc $3 \times \binom{9}{3}$ possibilités.

Correction 12. Nombres

1. Lorsqu'un nombre a strictement moins de r chiffres, on rajoute des 0 non significatifs à gauche. Ainsi, quitte à rajouter des 0 non significatifs à gauche, un résultat est une r-liste d'éléments pris parmi les 10 chiffres avec répétitions possibles. Il y a donc 10^r nombres de r chiffres au plus.
2. Pour avoir r chiffres exactement, le nombre ne peut pas commencer par 0 donc il n'y a que 9 choix possibles pour le premier chiffre le plus à gauche. Ensuite, il y a pour chaque chiffre 10 choix possibles avec ordre et répétitions possibles. Ainsi le nombre de nombre de r chiffres exactement est $9 \times 10^{r-1}$.
3. Pour avoir r chiffres exactement, il ne faut pas de 0 au début à gauche : il y a donc 9 choix possibles. Ce premier nombre de gauche a étant choisi, le reste constitue une $r-1$-liste d'éléments pris parmi $\{0, \dots 9\} \setminus \{a\}$ car on ne peut pas reprendre a. Ainsi, si $r - 1 > 9$, c'est-à-dire si $r > 10$: il n'y a pas de tel nombre. Sinon, on a : $9 \times \dfrac{9!}{(9 - (r - 1))!}$ tels nombres.

Correction 13. Nombres bis Pour que des entiers soient strictement inférieurs à 10^p, il faut qu'ils aient p chiffres au plus. Ainsi, quitte à rajouter des 0 non significatifs à gauche, on peut considérer qu'ils ont exactement p chiffres. La somme des chiffres doit faire 3, il y a donc trois ensembles disjoints possibles : l'ensemble A où le chiffre 3 figure et ainsi, tous les autres chiffres sont 0; l'ensemble B où il y a un 2 et un 1 qui figurent et tous les autres chiffres sont 0 et enfin l'ensemble C où il y a trois 1 qui figurent et tous les autres chiffres sont 0. Ces trois ensembles sont bien disjoints donc en notant E l'ensemble des entiers strictement inférieur à 10^p dont la somme des chiffres est égale à 3, on a : $E = A \cup B \cup C$. Et $\text{Card}\, E = \text{Card}\, A + \text{Card}\, B + \text{Card}\, C$ car les trois ensembles sont disjoints. Or $\text{Card}\, A = p$: il y a autant de choix possibles que de choix de la case où mettre le 3 ou encore je choisis la place où va être mon 3 et tout le reste, c'est des 0 donc p choix possibles. $\text{Card}\, B = p(p - 1)$: il s'agit de 2-listes sans répétition car on choisit les deux places pour le 1 et le 2 et l'ordre intervient ici. En effet un nombre avec un 1 à la place 3 et un 2 à la place 7 n'est pas le même nombre que si le 2 est à la place 3 et le 1 à la place 7. Par contre, $\text{Card}\, C = \binom{p}{3}$ car comme c'est le même nombre, l'ordre n'intervient pas ici : on choisit les 3 emplacements du 1 sans ordre. On a donc finalement $p + p(p - 1) + \binom{p}{3}$ possibilités. **Correction 14. Nombres**

ter

1. Un résultat est une liste ordonnée sans répétition. On a donc 6! nombres de 6 chiffres distincts avec 1,2,3,4,5,6.

2. On compte pour cela tous ceux qui sont plus petits que lui. On commence par le premier chiffre le plus à gauche : tous les nombres commençant par 1,2 ou 3 sont plus petit que lui : ainsi, il en a : 5! nombres qui commencent par 1, 5! nombres qui commencent par 2 et 5! nombres qui commencent par 3. Si un nombre commence par 4, pour savoir s'il est plus grand ou plus petit que 453216, il faut regarder son deuxième chiffre en partant de la gauche. S'il vaut 1,2,3 (pas 4 car on ne peut pas avoir de répétitions) alors tous ces nombres sont plus petits que 453216. Il y en a 4! qui commence par 41, 4! qui commencent par 42...et si le nombre commence par 45, il faut alors regarder le troisième chiffre en partant de la gauche... On obtient à la fin : $3\times 5!+3\times 4!+2\times 3!+2! = 446$. Il y a donc 446 nombres avant lui, il est donc le 447-ième.
3. Pour sommer tous ces nombres, une façon de faire est de sommer par unités, dizaine, centaine...séparément. Commençons par sommer les unités : il y a $5\,!$ nombres qui se terminent par 1, $5\,!$ qui se terminent par 2, $5\,!$ qui se terminent par 3....$5\,!$ qui se terminent par 6. Ainsi, pour les unités on obtient : $(5!\times 1+5!\times 2+5!\times 3+\cdots+5!\times 6)\times 10^0 = 5!\times 21\times 10^0$. On refait le même raisonnement pour les dizaines : il y a $5!\times 21\times 10^1$ dizaines. Ainsi, au final on obtient : $5!\times 21\times(10^0+10^1+\cdots+10^5) = 5!\times 21\times 111111$.

Correction 15. Rangement de billes dans des boîtes :

1. On commence par reformuler l'exercice sous la forme suivante : on a n billes identiques et on doit les répartir dans p boîtes distinctes. On note alors x_i le nombre de billes qu'on met dans la boîte i. Comme les nombres $(x_1,x_2,\dots,x_p)$ ne peuvent pas être nuls, les boîtes ne peuvent donc pas être vides (elles pourront l'être dans le 2. et on pourra alors raisonner comme d'habitude dans le cas de répartition de n objets identiques à répartir dans p boîtes distinctes chaque boîte pouvant en contenir 0,1 ou plusieurs). Ici, comme les boîtes ne peuvent pas être vides, on doit faire un peu attention : si on représente nos n billes par des ronds et les $p-1$ séparations parmi ces n objets par des barres, on a : par exemple $\circ|\circ\circ|\circ|\circ\circ\circ$. Ainsi, on doit répartir les separations parmis les $n-1$ emplacements qui se trouvent entre les billes (mais on ne peut pas mettre deux séparations à la suite car on aurait des boites vides). Si l'on représente les emplacement possibles des séparations par des points, on aurait ainsi les possibilités suivantes : $\circ.\circ.\circ.\circ.\circ.\circ.\circ$. Il s'agit donc de choisir $p-1$ séparations parmi les $n-1$ espaces disponibles. Il y a donc $\binom{n-1}{p-1}$ façons de faire ceci et donc $\binom{n-1}{p-1}$ solutions $(x_1,x_2,\dots,x_p)\in(\mathbb{N}^\star)^p$ de l'équation $x_1+x_2+\dots x_p = 0$.
2. Il y a deux façons de faire :
   - On peut utiliser le résultat précédent. Soit $(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{N}^p$ et posons, pour tout $i\in\{1,\dots,p\}$: $y_i = x_i+1$. On a alors : $(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{N}^p$ est solution de l'équation $x_1+\cdots+x_p = n$ si et seulement si $(y_1,\dots,y_p)$ est solution de l'équation $y_1+\cdots+y_p = n+p$ dans $(\mathbb{N}^\star)^p$. Par conséquent, d'après la question précédente (en remplaçant n par $n+p$), il y a $\binom{n+p-1}{p-1}$ solutions $(x_1,\dots,x_p)$ de l'équation $x_1+\cdots+x_p = n$ dans $\mathbb{N}^p$.
   - On peut retrouver ce résultat par un raisonnement direct. Cette fois-ci, il s'agit bien de répartir nos n objets dans p boîtes distinctes, chaque boîte pouvant en contenir 0, un ou plusieurs. On est donc exactement dans le cadre d'application du cours : on considère donc nos n ronds blancs et on rajoute $p-1$ barres (ou billes noires) qui modélisent les séparations. Par exemple, pour $n=4$ et $p=5$, $\circ\circ||\circ|\circ|$ représente le quintuplet $(2,0,1,1,0)$ solution de $x_1+x_2+\cdots+x_5 = 4$ dans $\mathbb{N}^5$. Il s'agit donc de répartir les $p-1$ barres (ou billes noires) parmi les $n+p-1$ emplacements (n objets et $p-1$ séparations) : on a donc $\binom{n+p-1}{p-1}$ possibilités. On retrouve bien le résultat précédent.

II Formules démontrées à l'aide du dénombrement

Correction 16. Chemins le long d'un quadrillage

1. Vous pouvez commencer par faire un exemple avec par exemple $n=5$ pour comprendre comment cela fonctionne.

- A chaque déplacement, il y a deux choix possibles : soit vers la droite, soit vers le haut. Ainsi, un chemin croissant est une succession de déplacements de type d (vers la droite) et de type h (vers le haut). L'ordre intervient car le chemin n'est pas le même si on a commencé par se déplacer vers la droite puis vers le haut ou si on a fait l'inverse. De plus, il y a répétition possible car on peut bien entendu se déplacer plusieurs fois vers le haut et plusieurs fois vers la droite. Ainsi, un chemin croissant de longueur n est un n-uplet d'éléments h ou d. Il y en a 2^n choix possibles.
- Au bout de n déplacements, on atteint un point de la forme (k,p) avec $k+p=n$, soit $p=n-k$. Ainsi les points atteints sont les points $(k,n-k)$, avec $k \in \{0,\dots,n\}$, qui correspondent à la diagonale du carré $n \times n$. Il y a donc $n+1$ points distincts.

2. (a) Pour relier A et B, il suffit de faire successivement m déplacements vers la droite et n déplacements vers le haut et ceci dans n'importe quel ordre. On a donc $m+n$ déplacements à faire au total. On commence par choisir le nombre de façon de placer les m déplacements vers la droite : on doit choisir m déplacements parmi $n+m$, sans ordre et sans répétition, soit $\binom{n+m}{m}$. Il n'y a ensuite plus le choix pour les autres déplacements, qui sont nécessairement des déplacements vers le haut. On obtient donc : $\binom{m+n}{m}$ chemins croissants permettent de relier A et B.

   (b) Comme dans la question précédente, pour relier A et C_k, il suffit de faire successivement k déplacements vers la droite et $p-k$ déplacements vers le haut, soit $p-k+k=p$ déplacements au total. Avec le même raisonnement, on obtient donc $\binom{p}{k}$ chemins possibles de A jusqu'à C_k.
   Puis pour relier C_k et B, il suffit de faire successivement $m-k$ déplacements vers la droite et $n-(p-k)$ déplacements vers le haut, soit $m-k+n-(p-k)=m+n-p$ déplacements au total. On obtient donc $\binom{m+n-p}{m-k}$ chemins possibles de C_k à B (on remarque que ce nombre de chemins est bien nul dès que $k>m$ où que $p-k>n$).
   Ces choix sont successifs, on a donc $\binom{p}{k} \times \binom{m+n-p}{m-k}$ chemins possibles pour aller de A à B en passant par C_k.
   On veut en déduire une autre formule pour le nombre de chemins de A à B. Pour aller de A à B, au bout de p déplacements, on est forcément sur un point de la forme $(k,p-k)$, avec $k \in \{0,\dots,p\}$. Il suffit donc de sommer ces différentes possibilités, et on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{m+n-p}{m-k}$ Sachant que les termes de la somme sont nuls dès que $k>m$, et en identifiant avec le résultat trouvé à la question précédente, on a donc :
$$\sum_{k=0}^{m} \binom{p}{k}\binom{m+n-p}{m-k} = \binom{m+n}{m}.$$
   Pour retrouver la formule de Vandermonde, il suffit de faire un changement dans le nom des variables, et poser $M=m+n-p$, $N=p$ et $R=m$. On obtient alors
$$\sum_{k=0}^{R} \binom{N}{k}\binom{M}{R-k} = \binom{M+N}{R},$$
   ce qui est bien la formule voulue.

Correction 17. Formule du multinôme (deuxième question plus dure)

1. On raisonne ici comme pour les anagrammes. On obtient donc $\dfrac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$ mots différents.
2. Calcul de $(a+b+c)^n$:
   Le terme général est de la forme $a^p b^q c^r$ avec $p+q+r=n$. De plus, un tel terme va apparaître lorsque l'on développe complétement $(a+b+c)^n$ autant de fois que l'on peut former de mots de n lettres en utilisant p fois la lettre a, q fois la lettre b et r fois la lettre c. Ainsi, le terme $a^p b^q c^r$ devra être sommé $\dfrac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$ fois.

On obtient ainsi que
$$(a+b+c)^n=\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-p}\frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}a^pb^qc^r.$$
En effet, on commence par choisir p variant de 0 à n, puis il faut choisir q variant de 0 à $n-p$ et enfin pour r, on est obligé de prendre $r=n-p-q$.
De plus, comme $r=n-p-q$, on a :
$$\frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}=\frac{n!}{p!q!(n-p-q)!}\qquad\text{et}\qquad\binom{n}{p}\binom{n-p}{q}=\frac{n!}{p!(n-p)!}\times\frac{(n-p)!}{q!(n-p-q)!}=\frac{n!}{p!q!(n-p-q)!}.$$
On a donc : $\dfrac{(p+q+r)!}{p!q!r!}=\dbinom{n}{p}\dbinom{n-p}{q}$. En remplaçant dans la somme, on obtient bien le résultat voulu, à savoir :
$$\boxed{(a+b+c)^n=\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-p}\binom{n}{p}\binom{n-p}{q}a^pb^qc^{n-p-q}}.$$

Correction 18. Démonstration d'une formule par le dénombrement

1. Il s'agit ici de dénombrer le nombre de mots formés avec des A et des B. L'ordre intervient donc et il y a répétitions possibles : on peut prendre plusieurs fois la lettre A et plusieurs fois la lettre B. Un tel mot est donc une $(p+q+1)$-liste de deux lettres et on obtient ainsi
$$\mathrm{Card}(\mathcal{M})=2^{p+q+1}.$$
2.
   - On veut que le $p+1$-ième A se trouve en $p+k$-ième position. Cela signifie que les $p+k-1$ premières lettres comporte p lettres A. Pour les $p+k-1$ premières lettres, il y a donc autant de possibilités que de façons de placer ces p lettres A parmi les $p+k-1$ lettres : on a donc $\dbinom{p+k-1}{p}$ choix possibles. Ensuite la $p+k$-ième lettre est un A et il y a donc une seule possibilité. Puis, pour les $q-k+1$ lettres restantes, il n'y a pas de restriction : on a donc 2^{q-k+1} possibilités. Au final, on obtient
$$\mathrm{Card}(\mathcal{N}_k)=\binom{p+k-1}{p}2^{q-k+1}.$$
   - Il est cair que $(\mathcal{N}_1,\dots\mathcal{N}_{q+1})$ est un système complet de $\mathcal{N}$ puisque le $p+1$-ième A se trouve entre la position $p+1$ et la position $p+q+1$ et les $\mathcal{N}_i$ sont bien 2 à 2 disjoints. Par conséquent, on a
$$\mathrm{Card}(\mathcal{N})=\sum_{k=1}^{q+1}\mathrm{Card}(\mathcal{N}_k)=\sum_{k=1}^{q+1}\binom{p+k-1}{p}2^{q-k+1}.$$
3. En utilisant un raisonnement similaire pour $\mathcal{R}$ (le $q+1$-ième B pouvant se trouver entre la position $q+1$ et la position $p+q+1$), on obtient, en remplaçant simplement p par q dans la formule précédente,
$$\mathrm{Card}(\mathcal{R})=\sum_{k=1}^{p+1}\mathrm{Card}(\mathcal{R}_k)=\sum_{k=1}^{p+1}\binom{q+k-1}{q}2^{p-k+1}.$$
4. Comme un mot de $\mathcal{M}$ comporte $p+q+1$ lettres, il comporte nécessairement ou bien au moins $p+1$ lettres A, ou bien au moins $q+1$ lettres B, ce qui s'écrit $\mathcal{M}=\mathcal{N}\cup\mathcal{R}$. Ensuite, $\mathcal{N}\cap\mathcal{R}$ désigne l'ensemble des mots de $\mathcal{M}$ comportant au moins $p+1$ lettres A et $q+1$ lettres B, ce qui n'est pas possible car un mot de $\mathcal{M}$ a $p+q+1$ lettres seulement. Ainsi, $\mathcal{N}\cap\mathcal{R}=\emptyset$. Par conséquent
$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(\mathcal{M})&=\mathrm{Card}(\mathcal{N})+\mathrm{Card}(\mathcal{R})\\&=\sum_{k=1}^{p+1}\binom{p+k-1}{p}2^{q-k+1}+\sum_{k=1}^{q+1}\binom{q+k-1}{q}2^{p-k+1}\\&=\sum_{k=0}^{p}\binom{p+k}{p}2^{q-k}+\sum_{k=0}^{q}\binom{q+k}{q}2^{p-k}\end{aligned}$$

en posant $k' = k-1$ dans les deux sommes. En utilisant alors la question 1, on obtient

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p+k}{p} 2^{q-k} + \sum_{k=0}^{q} \binom{q+k}{q} 2^{p-k} = 2^{p+q+1}.$$

5. On applique alors la formule précédente pour $p = q$ et cela nous donne

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p+k}{p} 2^{p-k} + \sum_{k=0}^{p} \binom{p+k}{p} 2^{p-k} = 2^{2p+1}.$$

On divise alors par 2 de chaque côté et on obtient

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p+k}{p} 2^{p-k} = 2^{2p}.$$

Si on pose alors $k' = p+k$, on a :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p+k}{p} 2^{p-k} = \sum_{k=p}^{2p} \binom{k}{p} 2^{2p-k} = 2^{2p}.$$

On obtient bien la formule voulue.

Correction 19. Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Notons C l'ensemble des couples (A, B) de parties de E vérifiant $B \subset A$:

$$C = \left\{ (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2, \quad B \subset A \right\}.$$

Il s'agit donc de calculer le cardinal de C. On commence par remarquer que si A est une partie de E fixée, il y a autant de couple $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ vérifiant $B \subset A$ que de parties B de A, c'est-à-dire $2^{\mathrm{Card}(A)}$ au total. Il semble donc naturel de dénombrer C en discutant sur le nombre d'éléments de A.
Pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, notons C_p l'ensemble des couples (A, B) de C tels que $\mathrm{Card}(A) = p$. On a clairement $C = C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_n$ puisqu'une partie A de E a un cardinal compris entre 0 et n. Ensuite les C_i sont 2 à 2 disjoints : en effet, un couple (A, B) de C_i n'appartient à aucun autre C_j pour $i \neq j$ puisque $\mathrm{Card}(A) = i \neq j$. Ainsi, on obtient que

$$\mathrm{Card}(C) = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{Card}(C_p).$$

Soit alors $p \in \{0, \dots, n\}$. Il y a $\binom{n}{p}$ parties A de E de cardinal p et pour chacune d'entre elles, il y a $2^{\mathrm{Card}(A)} = 2^p$ choix possibles de B vérifiant $B \subset A$ (comme on l'a vu). Par conséquent, C_p contient $\binom{n}{p} 2^p$ éléments. Finalement, en utilisant la formule du binôme de Newton, on a

$$\mathrm{Card}(C) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p = 3^n.$$

2. Comme $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \subset \overline{A}$, il y a autant de couples (A, B) de parties de E vérifiant $A \cap B = \emptyset$ que de couples (A, B) vérifiant $B \subset \overline{A}$. Le raisonnement fait ci-dessus peut être repris pour $\overline{A}$ et il y a donc 3^n couples (A, B) de parties de E vérifiant $A \cap B = \emptyset$.

3. • Choisir une partition (A, B, C) de E à 3 éléments revient à choisir un couple (A, B) tel que $A \cap B = \emptyset$. En effet, on n'a alors plus le choix pour C : il faut prendre $C = \overline{A \cup B}$. La réponse est donc une nouvelle fois 3^n.

- Retrouvons ce résultat par un raisonnement plus direct. Choisir une répartition de E, c'est regrouper les éléments de E en 3 paquets différents ordonnés que l'on numérote par exemple a, b, c. Il s'agit donc de répartir n éléments distincts (les éléments de E) dans les 3 boîtes a,b et c, chaque boîte pouvant contenir 0, un ou plusieurs éléments. On est donc dans un cadre de répartition de n éléments distincts dans 3 boîtes distinctes avec répétition possible. On retrouve bien 3^n.

Remarque : On a considéré ici les partitions comme une liste de 3 parties et donc avec un ordre : en clair la partition $(\emptyset, \emptyset, E)$ est différente de la partition $(E, \emptyset, \emptyset)$. Si on avait choisi de voir une partition comme la donnée de 3 parties $\{A, B, C\}$ (c'est-à-dire sans tenir compte de l'ordre) 2 à 2 disjointes et recouvrant E, il y en a moins. Plus précisemment, on a comptabilisé $3! = 6$ fois le même partage lorsque l'ordre compte (nombre de façons de permuter ces 3 parties). C'est tout le temps le cas sauf quand deux d'entre elles sont vides et l'autre vaut E, auquel cas on seulement comptabilisé trois fois : $(E, \emptyset, \emptyset)$, $(\emptyset, \emptyset, E)$ et $(\emptyset, E, \emptyset)$ alors que cela correspond au même partage $\{\emptyset, \emptyset, E\}$. Dans ce cas, il y aurait donc

$$\frac{3^n - 3}{3!} + 1 = \frac{3^{n-1} + 1}{2}$$

façons de partager E en trois.