Correction TD 13 : Logique

I Raisonnements : implication, équivalence

Correction 1. Étude de chaque propriété :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $\boxed{x^2 = 4 \Leftarrow x = 2.}$
   Le sens réciproque est vrai par passage au carré.
   En revanche le sens direct est faux. Contre-exemple : $x = -2$ vérifie $x^2 = 4$ et $x \neq 2$.
2. Soit $z \in C$. On a : $\boxed{z = -\overline{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}}$.
   On raisonne par double implication comme l'exemple du cours. Soit $z \in C$: on pose $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
   - Montrons que $z = -\overline{z} \Rightarrow z \in i\mathbb{R}$.
     On a $\overline{z} = a - ib$, donc $z = -\overline{z} \Rightarrow a + ib = -(a - ib) \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = 0$. On en deduit bien que $z \in i\mathbb{R}$.
   - Montrons que $z = -\overline{z} \Leftarrow z \in i\mathbb{R}$.
     Si $z \in i\mathbb{R}$, on a $a = 0$, soit $z = ib$. Donc $-\overline{z} = -(-ib) = ib = z$. Donc on a bien $z = -\overline{z}$.

   Conclusion : on a montré par double implication que $\boxed{z = -\overline{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $\boxed{x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow e^{4ix} = 1}$.
   Le sens direct est vrai, car $e^{4i\frac{\pi}{2}} = e^{2i\pi} = 1$.
   Le sens réciproque est faux, prendre par exemple $x = 0$.

Correction 2. On a $\boxed{A \Rightarrow B}$: en effet, si m et n sont pairs, alors il existe k et k' entiers tels que $m = 2k$ et $n = 2k'$. On a donc $m + n = 2k + 2k' = 2(k + k')$, ce qui implique $m + n$ pair.
Le sens réciproque est faux, $\boxed{B \text{ n'implique pas } A}$. Pour contre exemple on peut choisir $m = 3$ et $n = 5$. On a $3 + 5 = 8$: 8 est pair alors que 3 et 5 sont impairs.
On en déduit donc que $\boxed{\text{l'équivalence est fausse}}$. **Correction 3.** On montre l'équivalence par double implication.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}$.

- Etude du sens réciproque.
  On suppose que $x = 0$ et $y = 0$. On a alors $x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0$.
  Ainsi, on a montré que $\big(x = 0 \text{ et } y = 0\big) \Rightarrow \big(x^2 + y^2 = 0\big)$.
- Etude du sens direct.
  On raisonne par contraposée.
  On suppose que $x \neq 0$ ou $y \neq 0$.
  - Cas 1 : si $x \neq 0$. Alors $x^2 > 0$, et de plus $y^2 \geq 0$. Donc par somme $x^2 + y^2 > 0$, et donc $x^2 + y^2 \neq 0$.
  - Cas 2 : si $y \neq 0$. Le même raisonnement donne $x^2 + y^2 \neq 0$.

  Ainsi, par contraposée, on a montré que $(x^2 + y^2 = 0) \Rightarrow (x = 0 \text{ et } y = 0)$.

Conclusion : On a bien démontré que $\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x^2 + y^2 = 0) \Rightarrow (x = 0 \text{ et } y = 0)}$. **Correction 4.** On cherche

à montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \; (x + y > 2 \Rightarrow x > 1 \text{ ou } y > 1)$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Par contraposée, on suppose que $x \leq 1$ et $y \leq 1$. Par propriété sur les inégalités, on peut additionner terme à terme les inégalités, on obtient ainsi $x + y \leq 2$. Donc non$(x + y > 2)$ est vérifiée.
Conclusion : Par contraposée, on a bien démontré que $\boxed{(x + y > 2) \Rightarrow (x > 1 \text{ ou } y > 1)}$. **Correction 5.** Soit

$x \in \mathbb{R}^+$.
Pour montrer que la propriété P est vraie, on raisonne par contraposée.
On suppose donc que $x \neq 0$, c'est-à-dire $x > 0$. On cherche alors à vérifier que : $\exists \varepsilon > 0$ tel que $x > \varepsilon$.
En faisant un dessin, on remarque qu'il suffit de prendre (par exemple) $\varepsilon = \dfrac{x}{2}$. En effet, on a alors bien $\varepsilon > 0$ car $x > 0$ et $x > \dfrac{x}{2}$ (car $x > 0$) donc on a aussi $x > \varepsilon$.
Conclusion : Par contraposée, $\boxed{\text{on a bien démontré la propriété } P}$.

Correction 6. On considère deux fonctions f et g toutes les deux définies sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f et g sont deux fonctions impaires. Montrons que $f \circ g$ est impaire.
   - $\mathbb{R}$ est bien centré en 0.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$: $f \circ g(-x) = f[g(-x)] = f[-g(x)]$ car la fonction g est impaire. Puis comme la fonction f est elle aussi impaire, on obtient : $f[-g(x)] = -f[g(x)] = -f \circ g(x)$. Ainsi : $f \circ g(-x) = -f \circ g(x)$.

   Donc $f \circ g$ est impaire et on a bien montré que la compoée de deux fonctions impaires est impaire.
2. On suppose par exemple que f est paire et que g est impaire. Montrons que $f \circ g$ est paire.
   - $\mathbb{R}$ est bien centré en 0.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$: $f \circ g(-x) = f[g(-x)] = f[-g(x)]$ car la fonction g est impaire. Puis comme la fonction f est paire, on obtient : $f[-g(x)] = f[g(x)] = f \circ g(x)$. Ainsi : $f \circ g(-x) = f \circ g(x)$.

   Donc $f \circ g$ est paire et on a bien montré que la compoée d'une fonction paire et d'une fonction impaire est paire.
3. On suppose que f et g sont deux fonctions impaires. Montrons que $f + g$ est impaire :
   - $\mathbb{R}$ est bien centré en 0.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$: $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x)$ car les fonctions f et g sont impaires. Puis on obtient : $(f+g)(-x) = -(f(x)+g(x)) = -(f+g)(x)$.

   Donc $f + g$ est impaire et on a bien montré que la somme de deux fonctions impaires est impaire.
4. On suppose que f et g sont deux fonctions impaires. Montrons que $f \times g$ est paire :
   - $\mathbb{R}$ est bien centré en 0.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$: $(f \times g)(-x) = f(-x) \times g(-x) = -f(x) \times (-g(x))$ car les fonctions f et g sont impaires. Puis on obtient : $(f \times g)(-x) = f(x) \times g(x) = (f \times g)(x)$.

   Donc $f \times g$ est paire et on a bien montré que le produit de deux fonctions impaires est paire.

II Logique et quantificateur

Correction 7. Étude de chaque assertion :

1. Faux, on peut prendre comme contre exemple $x = -1$.
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ x < 0$.
2. Vrai, on peut prendre par exemple $y = 1$.
   Négation : $\forall y \in \mathbb{R},\ y < 0$.
3. Vrai : soit $x \in \mathbb{R}^+$. Comme x est positif, on peut poser $y = \sqrt{x}$. On a bien alors $y^2 = x$. On remarque que l'on peut également prendre $y = -\sqrt{x}$.
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R}^+,\ \forall y \in \mathbb{R},\ x \neq y^2$.
4. Faux : soit $y \in \mathbb{R}$ quelconque. On cherche un réel x tel que $x \neq y^2$. Il suffit de prendre par exemple $x = y^2 + 1$. On a bien alors $x \neq y^2$.
   Remarquons que les deux propriétés 3. et 4. diffèrent seulement par l'ordre dans lequel on a défini x et y.
   Négation : $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}^+,\ x \neq y^2$.

5. Faux : soit $x \in \mathbb{R}^+$ quelconque. Si pour tout réel y on avait $x = y^2$, alors en particulier, pour $y = 0$ on aurait $x = 0$, et pour $y = 1$ on aurait $x = 1$. Ceci est absurde.
   Négation : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \neq y^2$.
6. Faux : soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On cherche y tel que $x + y > 0$ est faux. Il suffit pour cela de prendre y tel que $x + y \leq 0$ c'est-à-dire $y \leq -x$. Prenons par exemple $y = -x - 1$. On a alors $x + y = -1 \leq 0$. Donc on a bien un contre-exemple.
   Négation : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0$.
7. Vrai : soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On cherche y tel que $x + y > 0$, c'est-à-dire $y > -x$. Prenons par exemple $y = -x + 1$. On a bien alors $x + y = 1 > 0$.
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0$.
8. Faux : on peut prendre comme contre-exemple $x = -1$ et $y = -2$. Alors $x + y = -3 < 0$.
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R},_{\exists}\, y \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0$.

Correction 8. Étude de chaque propriété :

1. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2\ \ (a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b))$
   Négation : $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq b$ et $f(a) > f(b)$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \geq 0$
   Négation : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) < 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ f(-x) \neq f(x)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq g(x)$
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > g(x)$.
6. $\exists T \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x + T) = f(x)$
   Négation : $\forall T \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x + T) \neq f(x)$.

Correction 9.

1. L'inégalité $1 \leq x < y$ correspond à $1 \leq x$ et $x < y$. Or la négation de (A et B) est (non A) ou (non B). Ainsi ici on obtient : $\boxed{x < 1 \text{ ou } x \geq y.}$
2. La négation de $P \Rightarrow Q$ est (P et (non Q)). Ainsi ici on obtient : $\boxed{x^2 = 1 \text{ et } x \neq 1.}$
3. La négation est : $\boxed{\exists x \in E,\ \exists x' \in E' : x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x')\ .}$