Table des matières

Chapitre 16 : limites et équivalents

I Définition de la limite d'une fonction

La définition de la limite pour les fonctions est analogue à celle que l'on a vu pour les suites. Cependant, contrairement aux suites pour lesquelles on ne s'intéresse qu'à la limite quand n tend vers $+\infty$, la situation est un peu plus compliquée dans le cas des fonctions. En effet, puisque l'on peut considérer aussi bien des limites en l'infini qu'en des points de $\mathbb{R}$ (et vers lesquels on peut s'approcher de différentes façons : par la droite, par la gauche, des deux côtés), plusieurs cas de figures et différentes notions doivent être introduites.
Intuitivement, une fonction f tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ en $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ lorsque $f(x)$ s'approche de ℓ quand x s'approche de x_0, ce qui se traduit différemment selon que x_0 et ℓ sont réels ou infinis.

Il y a trois niveaux de compréhension - a priori sans ordre de difficultés ni de relation :

- Comprendre intuitivement la notion de limite.
- Comprendre avec les quantificateurs la notion de limite.

— Savoir faire des calculs de limites.

Dans toute cette partie I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

I. 1 Limite finie en l'infini

Définition 1. Limite finie en l'infini :

- Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f a une limite finie en $+\infty$ s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

  ....

  Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f :]-\infty, a] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f a une limite finie en $-\infty$ s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

  ....

  Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

Remarque. Interprétation graphique : ....

Exemples. La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+3}{(2x+1)(x-2)}$ ....

La fonction $x \mapsto \cos(x)$ ....

I. 2 Limite infinie en l'infini

Définition 2. Limite infinie en l'infini :

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction.
  - $\star$ On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si :

    ....

    On note dans ce cas $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
  - $\star$ On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si :

    ....

    On note dans ce cas $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f :]-\infty, a] \to \mathbb{R}$ une fonction.
  - $\star$ On dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si :

    ....

    On note dans ce cas $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
  - $\star$ On dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ si :

    ....

    On note dans ce cas $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

I. 3 Limite finie en un point $x_0 \in \mathbb{R}$

Intuitivement, f tend vers ℓ en x_0 signifie que pour toute bande horizontale de taille 2ε (aussi petite soit-elle) centrée autour de ℓ, on peut trouver un intervalle de taille 2δ centré autour de x_0 tel que

Définition 3. Soient $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0 sur I si :

  On note dans ce cas $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$.
- On dit que f admet une limite finie en x_0 s'il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Proposition 4. Si f est définie en x_0 et possède une limite finie ℓ en x_0, on a nécessairement $\ell = \ldots$.
Autrement dit si une fonction a une limite finie en un point en lequel elle est définie, cette limite ne peut être que sa valeur en ce point.

Exemple 1. La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^\star$ et $\lim\limits_{x \to 0, x \neq 0} \dfrac{\sin x}{x} = \ldots$.

I. 4 Limite infinie en un point $x_0 \in \mathbb{R}$

Définition 5. Soient $x_0 \in I$ et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 sur $I \setminus \{x_0\}$ si :

  ....

  On note dans ce cas $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty$.
- On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 sur $I \setminus \{x_0\}$ si :

  ....

  On note dans ce cas $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty$.

Remarque. Interprétation graphique : ....

Exercice 6. Étude et représentation graphique de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{|x-1|}$.

I. 5 Limite épointé, limite à droite et à gauche en un point $x_0 \in \mathbb{R}$

On va maintenant étendre cette notion de limite au cas où $x_0 \in I$ et f n'est définie que sur $I \setminus \{x_0\}$ (donc non définie en x_0 mais uniquement autour de x_0).

Définition 7. Soient $x_0 \in I$ et $f : D_f \to R$ une fonction et x_0 une borne de D_f. On dit que f a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0 avec $x \neq x_0$ si :
On note dans ce cas $\lim\limits_{x\to x_0, x\neq x_0} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x\to x_0, x\neq x_0}{\longrightarrow} \ell$.

On va maintenant définir les notions de limite à droite et de limite à gauche en un point.

Définition 8. Soient $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Limite à droite : f admet une limite ℓ à droite en x_0 lorsque

  ....

  On la note ....
- Limite à gauche : f admet une limite ℓ à gauche en x_0 lorsque

  ....

  On la note ....

Remarque. Dire que f admet une limite à droite en x_0 consiste à étudier la limite uniquement lorsque l'on se rapproche de x_0 par valeurs strictement supérieures. De même, dire que f admet une limite à gauche en x_0 consiste à étudier la limite uniquement lorsque l'on se rapproche de x_0 par valeurs strictement inférieures.

Lorsque la fonction f est définie de manières différentes de part et d'autre de x_0, on s'intéresse aux limites à droite et à gauche pour étudier la limite de f en x_0. Plus précisement, on a le résultat suivant très important en pratique :

Proposition 9. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

- Si f admet une limite l (finie ou infinie) en x_0, alors ....
- Pour la réciproque, on doit étudier deux cas selon que f est définie ou non en x_0 :
  - ⋆ **Cas 1 : si $\mathbf{x_0} \notin \mathbf{I}$** :
    Si .... alors f admet une limite en x_0 et ....
  - ⋆ **Cas 2 : si $\mathbf{x_0} \in \mathbf{I}$** :
    Si ....alors f admet une limite en x_0 et : ....

Remarques.

- Cette proposition est en fait intuitive : une fonction f tend vers ℓ en x_0 si et seulement si elle tend vers ℓ lorsque l'on se rapproche de part et d'autre de x_0.
- Cette proposition est aussi utilisée pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point x_0 : il suffit de montrer que les limites à gauche et à droite en x_0 ne sont pas les mêmes ou qu'elles ne sont pas égales à $f(x_0)$ lorsque la fonction f est définie en x_0.

Exercice 10.

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ a-t-elle une limite en 1 ?
2. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(x-2)^2}$ a-t-elle une limite en 2 ?
3. La fonction partie entière a-t-elle une limite en 2 ?
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$. A quelle condition sur α cette fonction admet-elle une limite en 0 ?
5. On définit h sur $\mathbb{R}^\star$ par : $h(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \ln(1+x) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$. La fonction h a-t-elle une limite en 0 ?
6. On définit g sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 - \sin x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$. La fonction g a-t-elle une limite en 0 ?

II Opérations sur les limites

II. 1 Opérations algébriques sur les limites

Dans toute cette sous-partie, x_0 désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Pour calculer $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, on peut utiliser les propriétés sur les sommes, produits, et quotients de limites.

On rappelle les formes indéterminées pour lesquelles on ne peut pas conclure :

II. 2 Composition de limites

Proposition 11. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$. Soient x_0 un élément de I ou une borne (finie ou infinie) de I, y_0 un élément de J ou une borne (finie ou infinie) de J et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Alors

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) & = & y_0 \\ \lim\limits_{y\to y_0} g(y) & = & \ell \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} g\circ f(x) = \dots .$$

Exercice 12. Calculs de limites :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} + \ln x + x^{-2} - 1$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-\frac{1}{2}} - \ln x + 4e^{x}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} x - \sqrt{x^2+3x-1}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln|x|e^{-x} - 2x$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}x^{-\frac{1}{2}} + 4$
6. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\ln x} + \dfrac{1}{x}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{x\ln x}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{4-e^{-x}}$
9. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + 1}$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{x}}$
11. $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$
12. $\lim\limits_{x\to-\infty} x + \sqrt[3]{1+x^3}$
13. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{e^{x^2+x} - e^{x}}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}$

14. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln|x|+1}{e^x+1}$
15. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

Toujours commencer par essayer de calculer une limite en utilisant les propriétés sur les sommes, produits, quotients et composées de limites usuelles.

II. 3 Composition de limites avec les suites

Lien entre suite et fonction

La proposition suivante correspond à une composition de limites lorsque l'on compose une fonction et une suite.

Théorème 13. Soient une fonction f définie sur $\mathcal{D}_f$, $a \in \mathcal{D}_f$, et $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = b \iff$

Exemples.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ......, la suite $\left(u_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ......Et si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs, la suite $\left(\sqrt{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ......
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors les suites $\left(u_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sqrt{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ....

Application : montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point

Le théorème précédent permet en particulier de montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point. On a en effet le corollaire suivant qui n'est en fait que la contraposée du théorème précédent.

Proposition 14. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de I qui convergent toutes les deux vers x_0. On suppose :
- Soit que les deux suites $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ont des limites différentes (finies ou infinies).
- Soit qu'au moins une des deux suites $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Alors f n'a pas de limite en x_0.

Méthode pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en x_0 :
Trouver deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
- elles tendent toutes les deux vers x_0
- $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'ont pas le même comportement asymptotique.

Exemple 2. La fonction $x \mapsto \cos x$ n'a pas de limite en $+\infty$:

Exercice 15. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

III Limites et inégalités

Dans la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et x_0 un élément de I ou une borne (finie ou infinie) de I. Ainsi, soit $x_0 \in \mathbb{R}$, soit $x_0 = \pm\infty$.

III. 1 Théorème des gendarmes pour obtenir une limite finie

Théorème 16. Soient f, g et h trois fonctions définies sur I et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall x \in I,\ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell \end{array}\right. \implies$$

Penser au théorème des gendarmes pour les calculs de limites comportant :

- Les fonctions cosinus et sinus : $\cos(X)$, $\sin(X)$ avec X qui tend vers $\pm\infty$.
- La fonction partie entière.

Exercice 17. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$.

III. 2 Théorèmes de comparaison pour obtenir une limite infinie

Théorème 18. Soient f et g deux fonctions définies sur I.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall x \in I,\ f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \end{array}\right. \implies \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left\{\begin{array}{l} \forall x \in I,\ f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty \end{array}\right. \implies \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exercice 19. Calculer les limites de la fonction partie entière en $\pm\infty$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{\cos x}$.

III. 3 Passage à la limite dans une inégalité quand on sait que les limites existent

Théorème 20. Soient f et g deux fonctions définies sur I et $(\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell' \end{cases} \implies \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) < g(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell' \end{cases} \implies \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

⚠ Quand on passe à la limite dans une inégalité, les inégalités ....

⚠ On ne peut passer à la limite dans une inégalité que lorsque l'on sait que les limites existent.

III. 4 Limite et signe local

Proposition 21. Soient $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ finie.
Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\ell > 0$ alors :

....

Remarque. Précisons la notion de l'existence d'un voisinage de x_0 :

- Si $x_0 \in \mathbb{R}$, un voisinage est de la forme ....
- Si $x_0 = +\infty$, un voisinage est de la forme ....
- Si $x_0 = -\infty$, un voisinage est de la forme ....

III. 5 Limite d'une fonction monotone

On a un résultat analogue à celui des suites monotones (mais qui sert beaucoup moins en pratique).

Théorème 22. Soit f une fonction définie sur $I =]a, b[$ avec $a < b$ et éventuellement $a = -\infty$ et $b = +\infty$.

Si .... alors ....

Plus précisement, si, par exemple, f est croissante sur I, on a :

- $\star$ Si f est majorée sur I alors la limite de f en b est finie et elle est égale à $\sup_{x \in I} f(x)$.

  $\star$ Si f n'est pas majorée sur I, alors ....

- $\star$ Si f est minorée sur I alors la limite de f en a est finie et elle est égale à $\inf_{x \in I} f(x)$.

  $\star$ Si f n'est pas minorée sur I, alors ....

On peut énoncer un résultat analogue avec f décroissante sur I.

IV Fonctions équivalentes

La notion d'équivalence définit de manière rigoureuse la notion « deux fonctions f et g se comportent de la même façon au voisinage d'un point ».
Définition et caractérisation

Définition 23. Soient f et g deux fonctions définies sur $I \setminus \{x_0\}$ et ne s'annulant pas au voisinage de x_0.

- On dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0 si

- On note dans ce cas .... ou ....

⚠ Il est nécessaire de préciser sous le signe $\sim$ en quel point on se place.

⚠ $f \underset{x_0}{\sim} 0$ n'a pas de sens ! Donc une fonction équivalente à 0 sera toujours un résultat FAUX.

Exercice 24. Donner et démontrer l'équivalent des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto x + \ln x$ en $+\infty$
2. $x \mapsto e^x - 1$ en $+\infty$
3. $x \mapsto x + x^2$ en $+\infty$
4. $x \mapsto x^2 - e^x + 4\ln x$ en $+\infty$
5. $x \mapsto x + \ln x$ en 0
6. $x \mapsto x + x^2$ en 0
7. $x \mapsto x^2 - e^x$ en 0

Exemples importants : équivalents usuels

Proposition 25. Équivalents usuels en 0 :

- $\sin x \underset{0}{\sim}$
- $\cos x - 1 \underset{0}{\sim}$
- $\tan x \underset{0}{\sim}$
- $\ln(1+x) \underset{0}{\sim}$
- $e^x - 1 \underset{0}{\sim}$
- $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^\star$.

Remarque. Pour calculer un équivalent qui n'est pas en 0, on fait un changement de variable.

Démonstration. $\square$

Exercice 26. Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x(x-2)}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x(x-2)}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\sin x}$.

Lien avec les limites

Un des intérêts des équivalents est d'obtenir des limites lorsqu'il y a des formes indéterminées.

Proposition 27. Si f et g sont deux fonctions équivalentes en x_0, alors elles ont le même comportement en x_0, à savoir :

- f tend vers $l\in\mathbb{R}$ en x_0 $\Leftrightarrow$ ....
- f tend vers $\pm\infty$ en x_0 $\Leftrightarrow$, ...
- f n'a pas de limite en x_0 $\Leftrightarrow$ ....

Proposition 28. Soit $\ell\in\mathbb{R}$, $\ell\neq 0$. On a : $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$ si et seulement si $f \underset{x_0}{\sim}$......

⚠ Faux si $\ell=0$ ou si la limite est $\pm\infty$.

Propriétés des équivalents

Proposition 29. Soient $f,\ g,\ h$ et k des fonctions définies sur I.

- Produit : si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{\sim} k$ alors ....
- Quotient : si h et k ne s'annulent pas sur un voisinage de x_0 et si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{\sim} k$ alors ....
- Puissances :
  - ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors ....
  - ⋆ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si f et g sont strictement positives sur un voisinage de x_0 et si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors ....

⚠ On n'additionne JAMAIS des équivalents :

⚠ On ne compose JAMAIS des équivalents :

En pratique, si l'on veut composer par une fonction, il faut vérifier que cela marche en revenant à la définition avec les limites.

Proposition 30. Substitution : Soit $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Soient $f,\ g$ deux fonctions définies sur I et soit u une fonction définie sur un voisinage de t_0 et telle que $\lim_{t \to t_0} u(t) = x_0$. Alors

$$f \underset{x_0}{\sim} g \quad \Longrightarrow \quad f \circ u \underset{t_0}{\sim} g \circ u.$$

⚠ Il ne faut pas confondre les composés d'équivalents qui sont à proscrire et la substitution qui, elle, est autorisée.

Exercice 31. Déterminer un équivalent simple puis calculer la limite des expressions suivantes :

1. $x^2 - x\sqrt{x} - x\ln x$ en $+\infty$
2. $\dfrac{x^2 - x\sqrt{x} - x\ln x}{\ln x + e^x - x}$ en $+\infty$
3. $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$
4. $x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ en $+\infty$
5. $\dfrac{\tan^3(x)}{1 - \cos x}$ en 0
6. $\dfrac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x}$ en 0
7. $\dfrac{\sin(x^2 + 3x)}{x}$ en 0
8. $\dfrac{e^x - e}{\sin(x - 1)}$ en 1

9. $\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan(x)$ en $\frac{\pi}{2}$
10. $\ln(1 + \sin x)$ en 0

V Lever une indétermination

FI avec des polynômes ou des quotients de polynômes

- FI de type $(+\infty)+(-\infty)$ ou $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$: théorème du monôme de plus haut degré.
- FI de type $\dfrac{0}{0}$ quand x tend vers a : factorisation du numérateur et du dénominateur par $X-a$.

Exercice 32. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^5-2x^2$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^5-2x^2+5}{7x^4+3x+6}$
3. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^2+4x-6}{x^2-1}$
4. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$.

FI avec des racines carrées

- Mettre en facteur le terme prépondérant : surtout pour les FI de type $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ou $(+\infty)+(-\infty)$.
- Utilisation de la quantité conjuguée : surtout pour les FI de type $\dfrac{0}{0}$ ou $(+\infty)+(-\infty)$.
- Utilisation de l'équivalent usuel de la racine carrée : $\sqrt{1+x}-1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{2}$.

Exercice 33. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{\left(3\sqrt{2x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}$
2. $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-2x$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.

FI avec des exponentielles, puissances, logarithmes népériens

Théorème 34. Théorème des croissances comparées. Pour tous réels $a>0$ et $b>0$, on a :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^b}{x^a} = \dots\dots\dots$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x^a(\ln x)^b = \dots\dots\dots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^a}{e^{bx}} = \dots\dots\dots$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^a e^{bx} = \dots\dots\dots$

Remarque. On retient (mais on n'écrit JAMAIS !) que les puissances l'emportent sur le logarithme, et que l'exponentielle l'emporte sur les puissances.

- Utilisation des croissances comparées quitte à mettre en facteur le terme prépondérant.
- Utilisation des équivalents usuels du logarithme et de l'exponentielle.

Exercice 35. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^4)}{x^2}$
2. $\lim_{x\to +\infty} x\ln(x^2+x-1) - x\ln x$
3. $\lim_{x\to +\infty} x\ln x - x\ln(x-a)$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x}-1}{x}$
5. $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}+1}}$
6. $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{5}{x}\right)^{-4x}$
7. $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x+x^2}{x+\sqrt{x}\ln x}$
8. $\lim_{x\to +\infty} e^x - 3^x + x^{10}$

FI avec les fonctions cosinus, sinus

- Théorème des gendarmes avec $\cos X$, $\sin X$ quand $X \to \pm\infty$.
- Utilisation des équivalents usuels lorsque X tend vers un réel fini.

Exercice 36. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^3}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x\ln(1+x)}$
4. $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cos(\ln x)$
5. $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi x)}{2x^2+x-1}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{\sin(2x)}$ avec $a>0$.

Autres FI

Proposition 37. Taux d'accroissement.
Soient $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur I. Si f est dérivable en x_0 alors :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

- Mise en facteur du terme prépondérant.
- Reconnaître un taux d'accroissement.
- Utilisation d'équivalents.

- Utilisation de DL (plus tard).

Exercice 38. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi x)}{x - \frac{1}{2}}$
2. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{2}\cos(x)}{1 - \sqrt{2}\sin(x)}$
3. $\lim_{x \to 1} \frac{\cos(ax) - \cos a}{e^{ax} - e^{a}}$

VI Étude des branches infinies d'une fonction numérique

Définition 39. Soit une fonction f définie sur $\mathcal{D}_f$:

- si f est définie au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$), on dit alors que f admet une branche infinie au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$).
- si f est définie au voisinage d'un réel x_0 pour lequel elle admet une limite à droite, ou une limite à gauche (ou les deux) infinie(s), on dit alors que f admet une branche infinie en x_0.

Le plan est muni d'un repère orthogonal et $\mathcal{C}_f$ désigne la courbe représentative de la fonction f. On considère une fonction admettant une branche infinie en $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et on cherche à décrire cette branche infinie.

VI. 1 Comportement en un point fini

Définition 40. Soit f une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$.
Si f admet une limite infinie à droite ou à gauche en x_0, alors :

....

Exercice 41. Étude des branches infinies de la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$.

VI. 2 Comportement en l'infini

Asymptote horizontale

Définition 42. Soient $b \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (resp $-\infty$).
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ (resp $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$), alors :

....

Remarque. Connaître une asymptote à une courbe permet un meilleur tracé de cette dernière. Si, par exemple, la droite D d'équation $y = b$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$, on commence par tracer cette droite avant de tracer la courbe. On étudie aussi la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de l'asymptote D.

Exercice 43. Étude des branches infinies des fonctions définies par : $f : x \mapsto -e^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{7}{2}$ et $g : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$. On étudiera aussi la position relative des courbes par rapport à leurs asymptotes.

Asymptote oblique

Définition 44. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (resp $-\infty$).
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (resp $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$), alors :

....

Exercice 45. Montrer que la fonction définie par $f(x) = xe^{-x^2} + x + 2$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$, et étudier la position relative du graphe par rapport à l'asymptote.

Méthode de recherche de branches infinies

On calcule $\lim\limits_{\pm\infty} f$.

1. Si $\lim\limits_{\pm\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$: Asymptote horizontale d'équation $y = \ell$.
2. Si $\lim\limits_{\pm\infty} f = \pm\infty$: on calcule $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
   (a) Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$: Branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses *(ex : $x \to \ln x$).*
   (b) Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$: Branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées *(ex : $x \to e^x$).*
   (c) Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \neq 0$: on calcule $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax$.
      i. Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b$: Asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.
      ii. Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$: Branche parabolique de direction asymptotique la droite $y = ax$.
      iii. Si la limite n'existe pas : Branche infinie de direction asymptotique la droite $y = ax$.

Exercice 46. Étudier les branches infinies des fonctions suivantes ainsi que leur position relative par rapport à la courbe représentative des fonctions :

1. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$
2. $f(x) = x + \ln x$
3. $f(x) = 2x + \sin x$
4. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + 2x}$
5. $f(x) = \ln\left(e^x + 2e^{-x}\right)$
6. $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x - 1}{2x^2 - x}$
7. $f(x) = x + \sqrt{x}$
8. $f(x) = 2x - 1 - \sqrt{x^2 - 4x}$