

Chapitre 14 : Géométrie

Table des matières

I Vecteurs	1
I. 1 Généralités	1
I. 2 Repères et bases	2
I. 3 Déterminant	2
I. 4 Produit scalaire dans le plan ou l'espace	3
II Droites et cercles dans le plan	5
II. 1 Équation d'une droite du plan	5
II. 2 Équation d'un cercle du plan	6
III Droites et plans dans l'espace	7
III. 1 Équation d'un plan de l'espace	7
III. 2 Équation d'une droite dans l'espace	8
IV Projection Orthogonale	9

I Vecteurs

I. 1 Généralités

Définition 1. Un vecteur est la donnée d'une paire de points (A, B) de \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}^n) à translation près. Il est représenté par un segment orienté (une flèche). On le note \vec{AB} .
Si les deux points sont identiques, on l'appelle le vecteur nul. On le note $\vec{0}$.

Proposition 2. Un vecteur \vec{AB} non nul est caractérisé par :

- Sa direction : la droite (AB)
- Son sens : $A \rightarrow B$
- Sa norme : la longueur du segment $[A, B]$.

Définition 3. Soit D une droite et A, B deux points distincts de cette droite. Alors \vec{AB} est appelé vecteur directeur de D . (Il n'est pas unique)

Proposition 4. Réciproquement soit O un point et \vec{u} un vecteur non nul, alors il existe un unique point tel que $\vec{OM} = \vec{u}$. \vec{u} est un vecteur directeur de (OM) .

Définition 5. On dit que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si l'un des deux est nul, ou s'ils ont même direction, c'est-à-dire si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda v$. Autrement dit il existe $a, b \in \mathbb{R}^2$, non tous nuls $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$

Définition 6. On dit que trois vecteurs \vec{u} et \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si il existe $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ non tous nul tel que

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$$

Définition 7. On dit que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si l'un des deux est nul, ou s'ils ont des directions orthogonales, c'est-à-dire s'ils forment un angle de $\frac{\pi}{2}$ modulo π .

Proposition 8. Soient \vec{u}, \vec{v} deux vecteurs, $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$$

Proposition 9 (Relation de Chasles). Soient A, B, C trois points du plan ou de l'espace, on a alors :

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

Proposition 10. Soient A, B deux points du plan ou de l'espace, on a alors :

$$\vec{AB} = -\vec{BA}$$

I. 2 Repères et bases

Définition 11.

Proposition 12.

I. 3 Déterminant

Définition 13. Déterminant de deux vecteurs d'un plan Soit $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{v} = (x', y') \in \mathbb{R}^2$. Le déterminant des vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) est défini par :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} =$$

Proposition 14. Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de \mathbb{R}^2 sont colinéaires si et seulement si

Démonstration.

□

I. 4 Produit scalaire dans le plan ou l'espace

Définition 15. Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan ou de l'espace. Le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} est défini par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} =$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme du vecteur et θ est l'angle formé par les vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Proposition 16. Propriétés du produit scalaire

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$
- $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \dots\dots\dots$
- $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \dots\dots\dots$
- Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \dots\dots\dots$

Remarque. On peut en déduire les identités remarquables suivantes :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \dots\dots\dots \quad \text{et} \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \dots\dots\dots$$

Proposition 17. Expression grâce aux coordonnées

- Soit $\vec{u}(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{v}(x', y') \in \mathbb{R}^2$. Alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$
- Soit $\vec{u}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\vec{v}(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$. Alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$

Remarque. On peut en déduire l'expression de la norme d'un vecteur grâce à ses coordonnées :

- Soit $\vec{u}(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : $\|\vec{u}\| = \dots\dots\dots$
- Soit $\vec{u}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : $\|\vec{u}\| = \dots\dots\dots$

Proposition 18. Caractérisation à l'aide du produit scalaire

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\dots\dots\dots$

Remarque. Soient A, B et C trois points. On a alors $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$. On en déduit que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2$. On retrouve : $\dots\dots\dots$

Définition 19. Vecteur normal

- Soit \mathcal{D} une droite. On appelle vecteur normal de \mathcal{D} tout vecteur non nul dont la direction est orthogonale à \mathcal{D} , c'est-à-dire tout vecteur \vec{v} tel que pour tous points A et B de \mathcal{D} , on ait
- Soit \mathcal{P} un plan. On appelle vecteur normal de \mathcal{P} tout vecteur non nul dont la direction est orthogonale à \mathcal{P} , c'est-à-dire tout vecteur \vec{v} tel que pour tous points A et B de \mathcal{P} , on ait

Remarque. Soient A, B et C trois points. On a alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AH}\|$, où H est le projeté de C sur la droite AB .

II Droites et cercles dans le plan

II. 1 Équation d'une droite du plan

Proposition 20. Equation cartésienne d'une droite du plan

- Toute droite \mathcal{D} du plan admet une équation cartésienne de la forme avec $(a, b) \neq (0, 0)$.
- Un vecteur normal de \mathcal{D} est alors
- Le vecteur directeur est alors
- Si $b \neq 0$, le coefficient directeur est alors

Proposition 21. Positions relatives de deux droites du plan

Soient deux droites $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ et $\mathcal{D}' : a'x + b'y + c' = 0$.

- Elles sont confondues si c'est-à-dire si
- Elles sont parallèles si c'est-à-dire si
- Elles se coupent en un unique point si

Méthodes si on connaît un point $A(a, b)$ et un vecteur directeur non nul $\vec{u}(u_1, u_2)$:

- Équation paramétrique :

$$\begin{aligned}
 M(x, y) \in \mathcal{D} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\
 &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} \\
 &\iff \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}
 \end{aligned}$$

- Équation cartésienne :

$$\begin{aligned}
 M(x, y) \in \mathcal{D} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\
 &\iff \begin{vmatrix} x - a & u_1 \\ y - b & u_2 \end{vmatrix} = 0 \\
 &\iff
 \end{aligned}$$

Méthode si on connaît un point $A(a, b)$ et un vecteur normal $\vec{n}(n_1, n_2)$:

$$\begin{aligned}
 M(x, y) \in \mathcal{D} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux} \\
 &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\
 &\iff
 \end{aligned}$$

Exercice 22. Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Les points distincts A et B ont pour coordonnées respectives $(2, 4)$ et $(-1, 3)$. Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ont pour coordonnées respectives $(2, -1)$ et $(3, -2)$. Donner des équations des droites (AB) , \mathcal{D} droite qui passe par A et de vecteur directeur \vec{u} et \mathcal{D}' droite qui passe par B et qui est orthogonale à \vec{v} .

Exercice 23. Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soient les points $A(1, -2)$, $B(2, -1)$ et $C(6, -2)$.

1. Donner les équations des droites (AB) , (BC) et (CA) .
2. Donner une représentation paramétrique de la médiane de ABC passant par B .
3. Trouver les coordonnées de H orthocentre de ABC .
4. Quelle est l'aire de ABC ?

II. 2 Équation d'un cercle du plan

Proposition 24. Equation cartésienne d'un cercle du plan

Le cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon R admet pour équation :

Exercice 25. Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soient les points $A(2, 3)$ et $B(1, -1)$. Quelle est l'équation du cercle de centre B passant par A ? Quelle est l'équation de la tangente en A à \mathcal{C} ?

Exercice 26. Soit \mathcal{C} le cercle de centre O et de rayon 1 et soit \mathcal{C}' le cercle de centre Ω de coordonnées $(5, 0)$ et de rayon 2.

1. Quelles sont les équations de ces cercles?
2. Soit $M_0 \in \mathcal{C}$ le point de coordonnées (x_0, y_0) et soit \mathcal{D}_m la droite d'équation $y_0x - x_0y - m = 0$. Montrer que \mathcal{D}_m est perpendiculaire à la tangente en M_0 à \mathcal{C} .

III Droites et plans dans l'espace

III. 1 Équation d'un plan de l'espace

Proposition 27. Equation cartésienne d'un plan de l'espace

- Tout plan \mathcal{P} de l'espace admet une équation cartésienne de la forme avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
- Un vecteur normal de \mathcal{P} est alors

Proposition 28. Positions relatives de deux plans de l'espace

Soient deux plans $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ et $\mathcal{P}' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

- Ils sont confondus si
- Ils sont parallèles si
- Leur intersection est une droite de l'espace sinon.

Exercice 29. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit \mathcal{P}_m le plan d'équation $x - my + mz = 1$ avec m paramètre réel. Soient $A(0, 1, -1)$, $B(0, 0, 1)$ et $C(1, -1, 1)$ trois points de l'espace.

1. Montrer que les trois points A , B et C déterminent un plan de l'espace, noté \mathcal{R} et en donner une équation.
2. Donner un vecteur normal à \mathcal{P}_m .
3. Est-il possible que \mathcal{P}_m et \mathcal{R} soient parallèles ? Orthogonaux ? Si oui, à quelle(s) condition(s) ?
4. Soit \mathcal{D} une droite de vecteur directeur $\vec{v}(0, 1, 1)$. Montrer que \mathcal{D} est parallèle à \mathcal{P}_m .

Méthodes si on connaît un point $A(a, b, c)$ et deux vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$:

- Équation paramétrique :

$$\begin{aligned}
 M(x, y, z) \in \mathcal{P} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ s'écrit comme combinaison linéaire de } \vec{u} \text{ et de } \vec{v} \\
 &\iff \exists(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \beta\vec{v} \\
 &\iff \begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases}
 \end{aligned}$$

- Équation cartésienne : on résout le système d'inconnues (λ, μ) . L'équation de compatibilité que l'on obtient donne l'équation cartésienne du plan.

Méthode si on connaît un point $A(a, b, c)$ et un vecteur normal $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$:

$$\begin{aligned}
 M(x, y, z) \in \mathcal{P} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux} \\
 &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\
 &\iff
 \end{aligned}$$

Exercice 30. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ et $C(0, 0, 2)$. Montrer que ces trois points déterminent un plan. Donner un vecteur normal au plan puis donner une équation cartésienne du plan.

Exercice 31. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient $A(5, 2, 1)$, $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$.

1. Donner une équation du plan passant par A et de vecteurs directeurs les vecteurs \vec{u} et \vec{v} .
2. Donner une équation du plan normal à \vec{u} et passant par A .

III. 2 Équation d'une droite dans l'espace

Proposition 32. Equation cartésienne d'une droite de l'espace Toute droite de l'espace \mathcal{D} est l'intersection de deux plans non parallèles

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

avec (a, b, c) et (a', b', c') non proportionnels.

Méthodes si on connaît un point $A(a, b, c)$ et un vecteur directeur non nul $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$:

- Équation paramétrique :

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathcal{D} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} \\ &\iff \begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases} \end{aligned}$$

- Équation cartésienne : On résout le système d'inconnue λ . Les deux équations de compatibilité que l'on obtient donnent les équations cartésiennes de la droite.

Exercice 33. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 2)$ et $D(1, 2, 3)$.

1. Montrer que les trois points A , B et C déterminent un plan noté \mathcal{P} . Donner un vecteur normal au plan puis donner une équation cartésienne du plan.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par D et perpendiculaire au plan \mathcal{P} .
3. Donner les coordonnées de D_0 symétrique de D par rapport à \mathcal{P} .

IV Projection Orthogonale

Définition 34. Projection orthogonale.

- Soit M un point, et \mathcal{D} une droite. Le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D} est le point H de \mathcal{D} tel que les droites \mathcal{D} et MH soient perpendiculaires.
- Soit M un point, et \mathcal{P} un plan. Le projeté orthogonal de M sur \mathcal{P} est le point H de \mathcal{P} tel que la droite MH soit orthogonale à \mathcal{P} .