Programme de colle : Semaine 16
Lundi 29 janvier

I Cours

1. Géométrie
   (a) Rappels sur les vecteurs.
   (b) Géométrie du plan et de l'espace :
      i. Droite : équation cartésienne et paramétrique
      ii. Cercle : équation cartésienne
      iii. Plan : équation cartésienne et paramétrique
      iv. Projeté orthogonal, vecteur normal, vecteur directeur.
2. Vocabulaire des applications
   (a) Images, antécédents, image directe d'un ensemble par une fonction
   (b) Fonctions injectives, surjectives, bijectives
   (c) Théorème des valeurs intermédiaires, théorème de la bijection.
   (d) Bijections réciproques.
   (e) Dans le cas des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, calcul de la dérivée de la bijection réciproque.
3. Informatique
   (a) Parcours de listes.
   (b) Chaînes de caractères.
   (c) Tableau numpy

II Exercices Types

Exercice 1. Déterminer l'intersection de $\mathcal{D} : 2x+5y-10=0$ et de la droite $\mathcal{D}'$ passant par $A(-1,2)$ et dirigée par $\vec{u}(3,2)$.

Exercice 2. Déterminer une équation cartésienne de la droite D passant par $A=(2,1)$ et $B=(1,-2)$. Donner un vecteur directeur de D et une équation paramétrique de D.

Exercice 3. Déterminer une équation cartésienne de la droite D passant par $A=(2,1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}=(1,-1)$.

Déterminer le projeté orthogonal de $B=(1,1)$ sur D.

Exercice 4. Soit A et B de coordonnées : $A=(1,2)$ et $B=(2,3)$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega=(2,0)$ et de rayon 1. Pour tout point M du cercle on considère le triangle ABM.

Quel est le point du cercle qui minimise l'aire de ce triangle ?

Exercice 5. On considère les plans $\mathcal{P} : x-y+z=1$ et $\mathcal{P}' : x+2y+3z=6$.
Justifier que $\mathcal{P}\cap\mathcal{P}'$ est une droite, que l'on appellera $\mathcal{D}$. Déterminer un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Exercice 6. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soient les points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $C(0,0,2)$. Montrer que ces trois points détermine un plan. Donner un vecteur normal au plan puis donner une équation cartésienne du plan.

Exercice 7. On considère l'application $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par : $x\mapsto x^3-3x$.

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer $f([1,2])$, $f(\mathbb{R})$, $f([-1,+\infty[)$.

3. f est-elle injective ?

Exercice 8. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes. Lorsqu'elles sont bijectives, déterminer les applications réciproques.

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$
2. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$
3. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \right.$
4. $f : \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$
5. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array} \right.$
6. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(x) \end{array} \right.$

Exercice 9. Soit $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle une bijection ?

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. L'application f est-elle injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
2. Montrer que la restriction $g : \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ est une bijection.
3. Exprimer g^{-1}
4. Justifier que g^{-1} est dérivable et calculer la dérivée de g^{-1} (dur).