

Programme de colle : Semaine 15

Lundi 22 janvier

I Cours

1. Logique
 - (a) Quantificateurs \forall, \exists .
 - (b) Propositions, négation, opérations OU et ET.
 - (c) Implication, équivalence.
 - (d) Raisonnement direct, contraposée, absurde.
2. Géométrie
 - (a) Rappels sur les vecteurs.
 - (b) Géométrie du plan et de l'espace :
 - i. Droite : équation cartésienne et paramétrique
 - ii. Cercle : équation cartésienne
 - iii. Plan : équation cartésienne et paramétrique
 - iv. Projeté orthogonal, vecteur normal, vecteur directeur.
3. Vocabulaire des applications
 - (a) Images, antécédents, image directe d'un ensemble par une fonction
 - (b) Fonctions injectives
4. Informatique
 - (a) Parcours de listes.
 - (b) Tri par insertion.

II Exercices Types

Exercice 1. Montrer que si x et y sont deux réels qui vérifient $x + y > 2$, alors au moins un des deux est strictement supérieur à 1.

Exercice 2. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel

Exercice 3. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner leur négation.

- | | |
|--|--|
| 1. $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$. | 5. $\exists x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}, x = y^2$. |
| 2. $\exists y \in \mathbb{R}, y \geq 0$. | 6. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$. |
| 3. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$. | 7. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$. |
| 4. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^+, x = y^2$. | 8. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$. |

Exercice 4. Déterminer l'intersection de $\mathcal{D} : 2x + 5y - 10 = 0$ et de la droite \mathcal{D}' passant par $A(-1, 2)$ et dirigée par $\vec{u}(3, 2)$.

Exercice 5. Déterminer une équation cartésienne de la droite D passant par $A = (2, 1)$ et $B = (1, -2)$. Donner un vecteur directeur de D et une équation paramétrique de D .

Exercice 6. Déterminer une équation cartésienne de la droite D passant par $A = (2, 1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = (1, -1)$.

Déterminer le projeté orthogonal de $B = (1, 1)$ sur D .

Exercice 7. Soit A et B de coordonnées : $A = (1, 2)$ et $B = (2, 3)$. Soit \mathcal{C} le cercle de centre $\Omega = (2, 0)$ et de rayon 1. Pour tout point M du cercle on considère le triangle ABM .

Quel est le point du cercle qui minimise l'aire de ce triangle ?

Exercice 8. On considère les plans $\mathcal{P} : x - y + z = 1$ et $\mathcal{P}' : x + 2y + 3z = 6$. Justifier que $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est une droite, que l'on appellera \mathcal{D} . Déterminer un vecteur directeur de \mathcal{D} .

Exercice 9. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ et $C(0, 0, 2)$. Montrer que ces trois points déterminent un plan. Donner un vecteur normal au plan puis donner une équation cartésienne du plan.

Exercice 10. On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $x \mapsto x^3 - 3x$.

1. Étudier les variations de f .
2. Déterminer $f([1, 2])$, $f(\mathbb{R})$, $f([-1, +\infty[)$.
3. f est-elle injective ?