Programme de colle : Semaine 13
Lundi 8 janvier

I Cours

1. Matrices
   (a) Définition de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
   (b) Matrice identité, matrice diagonale, matrice triangulaire.
   (c) Sommes et produits de matrices. Transposition.
   (d) Matrices qui commutent : identité remarquables et binôme de Newton
   (e) Inversibilité, algorithme du pivot de Gauss sur la "matrice augmentée"
   (f) Cas des matrices de taille 2 : $\det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad - bc$. Formule d'inversion.
   (g) Lien avec les systèmes linéaires –> Rang d'une matrice (défini comme le rang du système $AX = 0$). Calcul du rang avec le pivot de Gauss directement sur la matrice.
   (h) Théorème : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a les équivalences suivantes :
      i. A est inversible.
      ii. $rg(A) = n$
      iii. Le système $AX = Y$ est de Cramer
   (i) Dénombrement (très peu d'exemples ont été vus)
      i. Cardinal d'un ensemble.
      ii. Cardinal d'une union disjointe.
      iii. Cardinal de l'union de deux ensembles (finis) quelconques
      iv. Cardinal du complémentaire
      v. Cardinal d'un produit cartésien
      vi. Choix de p objets parmi n (pas de 's' à 'parmi')
         A. Choix avec ordre et répétition n^p
         B. Choix avec ordre sans répétition $\frac{n!}{(n-p)!}$
2. Informatique
   (a) Parcours de listes.
   (b) Tri par insertion.

II Exercices Types

Exercice 1. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Calculer, lorsque cela est possible, $A + B$, AB, BA, A^2, AC, $B^T A^T$, CA, C^2, $(C - 2I_3)^3$, XB et $X^T C$.

Exercice 2. Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3. Soient les deux matrices suivantes : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^3. B est-elle inversible ?
2. Calculer les puissances n-ièmes de C. (Par exemple en utilisant le Binôme de Newton)

Exercice 4. On considère la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer N^2. Déterminer a, b tel que $N^2 = aN + bI$. N est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
2. Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ N^n = u_n N + v_n I.$$
3. En déduire u_n et v_n en fonction de n. Puis donner l'expression de N^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de réels telles que $x_0 = y_0 = 1$ et $z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} x_{n+1} &= 2x_n - 2y_n + z_n \\ y_{n+1} &= 2x_n - 3y_n + 2z_n \\ z_{n+1} &= -x_n + 2y_n. \end{cases}$$
Calculer x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Exercice 5. soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer $P^{-1}MP$
3. Étudier l'inversibilité de M.
4. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Donner le nombre d'anagrammes (oups je me suis trompé mercredi, il y a qu'un 'n' à 'anagramme') de votre prénom

Exercice 7. Donner le nombre de possibilités d'un tiercé dans une course avec 15 chevaux

Exercice 8. Un distributeur de prospectus met des prospectus (tous identiques) dans des boites aux lettres d'un immeuble avec 20 boites aux lettres. Il a 100 prospectus et il en met autant qu'il veut dans chaque boite. Combien y-a-t-il de manières de les distribuer ?