Chapitre 17 : Polynômes

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Généralités sur les polynômes. Degré et coefficient dominant.

I. 1 Définitions et notations

Définition 1. Notion de polynômes :

- On appelle polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute fonction $P: \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ qui est de type :
- $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont appelés ....
- $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemples.

- Donner un exemple de polynôme de $\mathbb{R}[X]$: ....
- Donner un exemple de polynôme de $\mathbb{C}[X]$: ....
- Donner des exemples de non polynôme : ....

Définition 2. Polynômes particuliers : notations usuelles :
On définit les polynômes particuliers suivants :

- le polynôme $\mathbf{1}$: $x \mapsto 1$ ....
- le polynôme X : $x \mapsto x$ ....
- pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, le polynôme X^n : $x \mapsto x^n$ appelé ....

Par exemple, le polynôme réel $P = 2X^4 - 5X^3 + 10X - 6$ est une fonction qui est définie par

Remarque. ⚠ Il faut bien comprendre ici que $\mathbf{1}, X, X^2, \dots X^n$ désignent des fonctions et pas des nombres. En particulier on ne confondra pas les notations suivantes :

⋆ $ax^2 + bx + c$ qui est ....

⋆ $aX^2 + bX + c$ qui est ....

⋆ $ax^2 + bx + c = 0$ qui est ....

⋆ $aX^2 + bX + c = 0$ qui est ....

De même, P est un polynôme donc une ....alors que $P(x)$ est un ....

I. 2 Unicité des coefficients

Théorème 3. Identification des coefficients d'un polynôme

- $P = 0 \iff \forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = 0 \iff$ ....

- $P = Q \iff \left\| \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{K} \quad P(x) = Q(x) \\ \forall x \in \mathbb{K} \quad \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k \end{array} \right.$

  $\iff \left\| \begin{array}{l} \text{les coefficients de } P \text{ et de } Q \text{ sont égaux.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$

Exercice 4.

1. Factoriser le polynôme $P = 2X^3 - 6X^2 + 5X - 1$.
2. Montrer qu'il existe trois réels $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que l'on ait : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{2}{3}\right\}$, $\quad \dfrac{6x^2 + 10x + 3}{(3x+2)(x+1)} = a + \dfrac{b}{3x+2} + \dfrac{c}{x+1}$.

I. 3 Opérations sur les polynômes

Comme les polynômes sont des cas particuliers de fonctions, on peut définir la somme de deux polynômes, le produit et la composée.

Théorème 5. Somme, multiplication, composition de polynômes

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, $Q = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Somme : $P + Q =$..est un polynôme

- Multiplication par un scalaire : $\lambda P =$..........................est un polynôme

- Multiplication de deux polynômes : $PQ : x \in \mathbb{K} \mapsto (PQ)(x) = P(x)Q(x)$ est un polynôme

Exercice 6.

1. $P = X^3 + 2X^2 + 1$ et $Q = X^2 - 2X + 1$. Calcul de PQ.
2. On définit souvent : $P(X + a)$ qui est la composée du polynôme P et du polynôme $X + a$. Calculer $P(X + a)$ avec $P = X^3 - 3X^2 + 1$.

Proposition 7. Simplification avec les polynômes :

- $\forall (P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2, \quad P \times Q = 0 \Longleftrightarrow$ ....
- $\forall (P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2, \quad (P \times Q = P \times R$ et $P \neq 0) \Longrightarrow$ ....

I. 4 Degré et coefficient dominant d'un polynôme

Définition 8. Degré d'un polynôme
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ s'écrivant : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

- Le degré de P est noté $\deg(P)$ et est défini par :
  - $\star$ si P est le polynôme nul alors ....
  - $\star$ Sinon ....
- Ainsi, si P n'est pas le polynôme nul :

  $\deg(P) = n \Longleftrightarrow$
- a_n est alors appelé ....
- $a_n X^n$ est alors appelé ....
- On dit qu'un polynôme est unitaire si ....
- On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ ....

Proposition 9. Si $P = Q$ alors

Réciproquement si $deg(P) \neq deg(Q)$ alors

Remarques :

- Bien sûr deux polynômes peuvent avoir le même degré et ne pas être égaux !
- Si P est un polynôme constant non nul alors ....
- Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors le degré de P n'est pas forcément n.
  - $\star$ Si $a_n \neq 0$ alors ....

⋆ Si $a_n = 0$, on a ....

Ainsi la notation $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ signifie juste que ....

Proposition 10. Degré d'une somme, d'un produit, d'une composée, d'un polynôme dérivée
Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Somme : $\deg(P+Q)$ ....
  - ⋆ Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ alors : $\deg(P+Q) =$..................................
  - ⋆ Si $\deg(P) = \deg(Q)$ alors : $\deg(P+Q)$ ....
- Produit par un scalaire : $\deg(\lambda P) =$ ....
- Produit : $\deg(PQ) =$ ....
- Composition : $\deg(P(Q)) =$ ....
- Dérivation : $\deg(P') =$ ....

Exercice 11.
1. Soit P un polynôme de degré n et $Q = P(X+1) - P$. Montrer que $\deg(Q) \leq n$, puis que $\deg(Q) \leq n-1$.
2. Soit P un polynôme de degré n. Déterminer le degré de $Q = \sum\limits_{k=0}^{n} P^{(k)}$.

Méthodes pour déterminer le coefficient dominant et le degré d'un polynôme P

- Calculer explicitement P (lorsque cela est possible, plutôt pour les polynômes de petit degré).
- Étudier uniquement les monômes de plus haut degré du polynôme et regarder s'ils sont nuls ou pas :
  - ⋆ On écrit P sous la forme $P = a_n X^n + Q$ avec $Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
  - ⋆ On calcule a_n :
    - ∘ Si $a_n \neq 0$ alors $\deg P =$ ...... et le coefficient dominant est ....
    - ∘ Si $a_n = 0$ alors $\deg P \leq$ ...... et on écrit P sous la forme : $P = a_{n-1} X^{n-1} + Q$ avec $Q \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$.
      On calcule a_{n-1} pour savoir s'il est nul ou pas.
  - ⋆ On continue ainsi jusqu'à tomber sur un terme non nul.
- Utiliser les résultats sur le degré d'une somme, d'un produit, d'une composée et d'une dérivée.
- Lorsqu'il s'agit d'une suite de polynômes définie par récurrence, on raisonne par récurrence.
  - ⋆ Pour deviner le résultat, il est conseillé de regarder les premiers termes de la suite : $P_0, P_1, P_2 \ldots$.
  - ⋆ On conjecture alors le résultat.
  - ⋆ On le démontre par récurrence en utilisant la relation de récurrence.

Exercice 12. 1. Étudier le degré et le coefficient dominant de $P = (X+1)^6 - X^6 + 2$.

2. On définit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = -2X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = -2XP_{n+1} - 2(n+1)P_n. \end{cases}$

   Calculer P_2 et P_3. Trouver le degré et le coefficient de plus haut degré de P_n.

II Polynômes et dérivation

Les polynômes sont des fonctions très régulières qui sont continues, et dérivables une infinité de fois. On peut donc calculer leurs dérivées successives.

II. 1 Polynôme dérivé, dérivées successives d'un polynôme

Définition 13. Dérivation d'un polynôme

- Dérivée des fonctions X^n, $n \in \mathbb{N}$:

$\star$ $n = 0$: $(X^0)' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\star$ $n > 0$: $(X^n)' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

- $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}$ de degré n ($a_n \neq 0$).

$\star$ $n = 0$: la dérivée d'un polynôme constant est $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\star$ $n > 0$: $P' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Définition 14. La dérivée n-éme d'un polynôme est définie par réccurrence. On a

$$\begin{cases} P^{(0)} & = & P \\ P^{(n+1)} & = & (P^{(n)})' \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 15.
1. Calculer les dérivées suivantes : $(X^2)'$, $(X^2)^{(2)}$, $(X^2)^{(3)}$.
2. Calculer les dérivées suivantes : $(X^n)^{(0)}$, $(X^n)'$, $(X^n)^{(2)}$, $(X^n)^{(3)}$, $(X^n)^{(n)}$, $(X^n)^{(n+1)}$.

Proposition 16. Exemples usuels de dérivées successives d'un polynôme :

- Pour tous entiers naturels n et p, on a

$$(X^n)^{(p)} =$$

- Pour tous entiers naturels n et p, on a

$$((X-a)^n)^{(p)} =$$

- Soit P un polynôme de $\mathbb{K}$ de degré n. Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$ alors, on a

$$P^{(p)} =$$

Exercice 17. 1. Calculer les dérivées première, seconde et troisième de $P = 5X^6 + 4X^3 + X^2$.

2. Faire de même avec $Q = (2+3i)X^4 - (5-i)X^3 + iX - 8$.

Proposition 18. Soit $P \in \mathbb{K}$, on a :

- $P' = 0 \iff$ ....
- Si P n'est pas constant alors : $\deg(P') =$ ....
- Si $\deg(P) = n$ avec $n \in \mathbb{N}$ alors $P^{(n+1)} =$ ....

II. 2 Opérations sur la dérivation

Proposition 19. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $(P+Q)' =$ ....
- $(\lambda P)' =$ ....
- $(PQ)' =$ ....

Exercice 20. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par récurrence par : $\begin{cases} P_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = (2n+1)XP_n - (X^2+1)P_n'. \end{cases}$

Calculer P_1, P_2 et P_3. Trouver le degré et le coefficient dominant de P_n.

III Racines d'un polynôme

III. 1 *Définition et caractérisation*

Définition 21. Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. On dit que Q divise P si :

Définition 22. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.
On dit que a est *racine de P* (ou un zéro de P) si

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que a est *racine de multiplicité k de P* si

Théorème 23. Caractérisation d'une racine d'un polynôme
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$

- a racine de P $\iff$
- a racine d'ordre k de P $\iff$

Remarques. Ainsi, dès que l'on connaît une racine (ou zéro) a de P, on peut factorier P par $X - a$.

- Pour $k = 1$, on dit que la racine est ...., pour $k = 2$, on dit que la racine est ....
Dès que $k > 1$, on dit que la racine est ....
Et pour $k = 0$, a n'est pas racine de P.
- ⚠ On distinguera bien les racines réelles et les racines complexes selon que P est vu comme un polynôme réel ou complexe. En effet, un polynôme dont tous les coefficients sont réels peut être considéré comme un polynôme réel mais aussi comme un polynôme complexe. Cela change tout au niveau des racines.
Exemple avec $P = X^2 + 1$:

III. 2 Méthodes pour obtenir les racines d'un polynôme

Méthodes pour déterminer les racines d'un polynôme P :

- Si P est un polynôme de degré 0, 1 ou 2 : on connaît ses racines.
- Si P est un polynôme de degré supérieur :
  - ⋆ Recherche de racines évidentes : on teste avec -2,-1,0,1,2,-i,i....
  - ⋆ Détermination de leur multiplicité en calculant les dérivées successives.
  - ⋆ On utilise parfois : Si $P \in \mathbb{R}$ et si P a une racine complexe, son conjugué sera aussi racine de P avec la même multiplicité.
- Si $P \in \mathbb{R}$, utiliser le théorème des valeurs intermédiaires ou le théorème de la bijection sur la fonction $x \mapsto P(x)$ pour déterminer l'existence et/ou l'unicité de racines.
- Utilisation des identités remarquables.

Exercice 24.
1. Déterminer les racines complexes de $P = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + X - 1$
2. Déterminer les racines complexes de $P = X^5 - 1$
3. Soit n un entier non nul. Montrer que 1 est racine de $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$ et déterminer l'ordre de multiplicité de cette racine.

Exercice 25. Montrer que tout polynôme de $\mathbb{R}$ de degré impair admet au moins une racine réelle.

III. 3 Méthodes pour montrer l'égalité entre deux polynômes ou la nullité d'un polynôme

Soient $P \in \mathbb{K}$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont des racines de $P \iff$

On en déduit le résultat suivant :

Théorème 26. Lien entre le nombre de racines et la nullité d'un polynôme

- Tout polynôme de degré inférieur ou égal à n et qui admet au moins $n+1$ racines est ....
- Deux polynômes de degré $\leq n$ ayant les mêmes valeurs pour au moins $n+1$ valeurs sont ....

Méthodes pour montrer qu'un polynôme P est nul

- Méthode 1 : On montre que tous ses coefficients sont nuls.
- Méthode 2 : On montre qu'il a strictement plus de racines que son degré ou qu'il a une infinité de racines.

Méthodes pour montrer que deux polynômes sont égaux

- Méthode 1 : On montre qu'ils ont les mêmes coefficients.
- Méthode 2 : On montre qu'ils sont égaux sur strictement plus de valeurs que leur degré.

Exercice 27. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) = P(x)$.

IV Factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

IV. 1 Factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{C}$

Théorème 28. Théorème de d'Alembert - Hors Programme ! mais tellement fondamental...

- Dans $\mathbb{C}$, un polynôme de degré n a exactement n racines, en comptant leur multiplicité.
- Dans $\mathbb{C}$, un polynôme P non nul de degré n se factorise selon

$$P = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - z_k)^{p_k}$$

avec
  - ⋆ a_n coefficient dominant de P,
  - ⋆ $z_1, z_2, \ldots, z_k$ sont toutes les racines de P complexes distinctes et
  - ⋆ $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont les multiplicités respectives de ces racines : $p_1 + \cdots + p_k = n$.

Factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}$ revient à déterminer toutes ses racines complexes avec leur ordre.

Exercice 29.
1. Factorisation dans $\mathbb{C}$ de $P = X^3 + X^2 + X + 1$.
2. Factorisation dans $\mathbb{C}$ de $P = 2X^4 + 6X^2 + 4$.
3. Factorisation dans $\mathbb{C}$ de $P = X^n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Remarque. Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$:

Exercice 30.
1. Factorisation dans $\mathbb{R}$ de $P = X^4 - 1$
2. Factorisation dans $\mathbb{R}$ de $P = 2X^4 + 6X^2 + 4$

IV. 2 Relation coefficients-racines

On rappelle le résultat suivant donnant une relation entre les racines d'un polynôme de degré 2 et les coefficients de ce polynôme.

Proposition 31. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$.
Les complexes (z_1, z_2) sont racines de P si et seulement si :

Exercice 32. Soit P un polynôme de degré 3 ayant pour racines x_1, x_2, x_3. Exprimer $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ et $x_1x_2x_3$ en fonction des coefficients de P.