Programme de colle : Semaine 19
Lundi 4 Mars

1 Cours

1. Polynômes
   - Définition d'un polynôme en tant que fonction polynomiale de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
   - Unicité des coefficients.
   - Définition du degré et règle de calculs.
   - Dérivée d'un polynôme, dérivée $n-$iéme. Formule pour $(X^n)^{(p)}$
   - Racine et notion de divisibilité entre polynômes. r racine de $P \iff$ il existe Q tel que $P = (X - \alpha)Q$
   - Inégalité entre nombre de racines et degré.
   - Multiplicité d'une racine.
   - Théorème de d'Alembert-Gauss (Hors-programme normalement en première année...), factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$
   - Egalité entre nombre de racines comptées avec multiplicité et degré.
   - Lien coefficients-racines. z_1, z_2 sont racines de $aX^2 + bX + c$ ($a \neq 0$) si et seulement si $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.
2. Informatique
   (a) Parcours de listes.
   (b) Chaînes de caractères.
   (c) Tableau numpy.
   (d) Récursivité.

2 Exercices Types

Exercice 1. *Simplifier le polynôme* $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k$.

Exercice 2. *Montrer qu'un polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.*

Exercice 3. *Déterminer tous les polynômes de* $\mathbb{R}[X]$ *qui vérifient* $P(X) = P(X+1)$

Exercice 4. *On définit une suite de polynômes* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par :* $\begin{cases} P_0 = 1,\ P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} + \left(1 - \dfrac{X^2}{4}\right) P_n. \end{cases}$

1. *Calculer* P_2 *et* P_3.
2. *Démontrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, P_n *est de degré inférieur ou égal à* n.
3. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on note* a_n *le coefficient d'indice* n *de* P_n.
   (a) *Donner les valeurs de* $a_0,\ a_1,\ a_2$ *et* a_3.
   (b) *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} - \dfrac{a_n}{4}$.
   En déduire une expression de a_n *en fonction de* n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *puis le degré du polynôme* P_n.

Exercice 5. *Soit* $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. *Exprimer de deux façons différentes le coefficient de* X^n *dans le polynôme :* $P = (1+X)^n(1+X)^n$.

2. *En déduire l'expression de* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 6. *Soit* $n \geq 2$, *on pose* $P = (X+1)^n - 1$.

1. *Déterminer toutes les racines de* P *dans* $\mathbb{C}$ *et en déduire la factorisation de* P *dans* $\mathbb{C}$.
2. *On note* Q *le polynôme de* $\mathbb{C}$ *tel que :* $P = XQ$. *À l'aide des racines de* Q, *déterminer la valeur de :*

$$A = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Exercice 7. *Expression de sommes.*

1. *Trouver un polynôme* P *de degré 3 tel que :* $P - P(X+1) = X^3$.

   En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
2. *Montrer qu'il existe un polynôme* P *de degré 4 tel que :* $P(X+1) - P = X(X-1)(X-2)$

   En déduire pour tout $n \geq 1$ *une expression simple de* $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2)$.

Exercice 8. *On représente informatiquement un polynôme sous forme d'une liste de ses coefficients ie.* `[a0,a1, ... ,an]` *représente le polynôme* $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

- *Ecrire une fonction Python qui prend en argument une liste* `P` *correspondant à un polynôme* P *et un flottant* `x` *et retourne la valeur de* $P(x)$
- *Ecrire une fonction Python qui prend en argument une liste* `P` *correspondant à un polynôme* P *et retourne son degré. (attention aux derniers coefficients qui peuvent être nuls...)*
- *Ecrire une fonction Python qui prend en argument deux listes* `P1,P2` *correspondant à deux polynômes* P_1, P_2 *et qui retourne la liste correspondant au polynômes* $P_1 + P_2$ *(attention aux tailles des deux listes)*