TD - 19 : Continuité

I Étude de la continuité de fonctions numériques

Exercice 1. Étudier la continuité des deux fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto (x^2-1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \cos(\ln|x|)\ln(1+x).$$

Exercice 2. Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-4x)}{2x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

3. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^2+4x}{1+x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Exercice 3. Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{e^{x^2}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 4. On considère la fonction h définie par

$$h(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{si } |x| < 1 \qquad \text{et} \qquad h(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{si } |x| \geq 1.$$

Déterminer les réels $a,\ b$ et c pour lesquels h est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \max(f(x), g(x)) = \dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$.
2. En déduire que la fonction $\max(f, g)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

II Existence d'un éventuel prolongement par continuité

Exercice 6. Étudier la continuité des fonctions suivantes. Les fonctions suivantes admettent-elles un prolongement par continuité aux bornes finies de leur domaine de définition ?

1. $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. $f(x) = \dfrac{|x|\ln(1+x)}{e^{2x^2}-1}$.
3. $f(x) = \ln(\sqrt{x}-1) - \ln(x-1)$.
4. $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x^2-1}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$
6. $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{1+x}}$
7. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$
8. $f(x) = \dfrac{1-\cos(\sqrt{x})}{|x|}$
9. $f(x) = x\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)$
10. $f(x) = x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$
11. $f(x) = \dfrac{6x^2+5x-4}{2x-1}$
12. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$
13. $f(x) = x^x$

Exercice 7. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = (e^x + 2x)^{\frac{1}{x}}$. Étudier un éventuel prolongement par continuité de f.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Étudier la continuité de $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{e^x - 1}$.
L'application f admet-elle un prolongement par continuité aux bornes de son domaine de définition ?

Exercice 9. Soit n un entier naturel non nul. On définit f_n par $f_n(x) = \dfrac{e^{x^2} - e}{x^{2n} - 1}$. Quel est son ensemble de définition ? La fonction f_n admet-elle un prolongement par continuité définie sur $\mathbb{R}$?

Exercice 10. Montrer que pour $a > -1$, la fonction f_a définie par $f_a(x) = |x|^a \sin x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$.

III Applications des théorèmes sur la continuité

Exercice 11. Soit l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$. Montrer qu'elle a trois racines dans $\mathbb{R}$.

Exercice 12. Étudier la fonction $f : x \mapsto x^3 - x + 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle $\alpha \in]-2, -1[$. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

Exercice 13. Suites implicites, le retour !
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère la fonction f_n définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = x^3 + 3x - n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note u_n cette solution.
2. Montrer que : $0 \leq u_n \leq n^{\frac{1}{3}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
3. Montrer que la suite est croissante.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on a : $\left(\dfrac{u_n}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^3 = 1 - 3\dfrac{u_n}{n}$. En déduire que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{3}}$ ainsi que la limite de la suite.

Exercice 14. Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(0) = g(1)$ et $f(1) = g(0)$. Démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ possède au moins une solution dans $[0,1]$.

Exercice 15. Étude des points fixes d'une fonction.

1. Montrer que si $f : [0,1] \to [0,1]$ est une fonction continue sur $[0,1]$ alors f admet un point fixe dans $[0,1]$.
2. Montrer que si f est continue et décroissante sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$, f admet un unique point fixe dans $[0,1]$.

Exercice 16. Soit $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Montrer que si f possède des limites finies en $-\infty$ et en $+\infty$ alors elle est bornée.

Exercice 17. Soient $f :\ [0,1] \to [0,1]$ et $g :\ [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions continues sur $[0,1]$ et telles que $f \circ g = g \circ f$. Le but est de montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$. On va raisonner par l'absurde en supposant que

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) \neq g(x).$$

1. Montrer que l'on peut se ramener au cas où : $\forall x \in [0,1], \quad f(x) > g(x)$.
2. Démontrer qu'il existe $m > 0$ tel que : $\forall x \in [0,1], \quad f(x) \geq g(x) + m$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$: $f^n(x) \in [0,1]$ et $g^n(x) \in [0,1]$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in [0,1], \quad f^n(x) \geq g^n(x) + nm$.
5. Conclure.

Exercice 18. Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{x^2}{x^2-1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Montrer que f est une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur $f(\mathcal{D}_f)$, ensembles à préciser. Quelles sont les propriétés de f^{-1} ? Expliciter f^{-1}.

Exercice 19. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On pose, $\forall x \in]a, b[,\ f(x) = \dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b}$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de $]a, b[$ sur un intervalle J que l'on précisera. Que peut-on dire de l'application f^{-1} ?
2. Déterminer f^{-1} dans le cas $a = -1$ et $b = 1$. Représenter graphiquement f et f^{-1}.

Exercice 20. On note f la fonction définie par $f(x) = e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.
2. Étudier la fonction.
3. On définit alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Déterminer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 21. On note f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.
2. On définit alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Déterminer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

IV Résolution d'équations fonctionnelles

Exercice 22. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = g\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad g(x) = g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
2. En déduire que g est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 23. Le but est de déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

On considère une telle fonction et on pose $a = f(1)$.

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que la fonction f est impaire.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z},\quad f(nx) = nf(x)$. On pourra commencer à le montrer pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que : $\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star,\quad f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{p}{q}a$.
5. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = xa$ (on pourra utiliser en l'admettant le fait que tout réel est limite d'une suite de rationnels).
6. Conclure.