Correction TD - 19 : continuité

I Étude de la continuité de fonctions numériques

Correction 1.

1. **Étudier la continuité de la fonction suivante :** $f : x \mapsto (x^2-1)\sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x-1 \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
   - Régularité : La fonction f est continue sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme somme, quotient, composée et produit de fonctions continues.
2. **Étudier la continuité de la fonction suivante :** $g : x \mapsto \cos(\ln|x|)\ln(1+x)$
   - Domaine de définition : la fonction g est bien définie si $1+x>0$ et $|x|>0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_g =]-1,0[\cup]0,+\infty[$.
   - Régularité : La fonction g est continue sur $\mathcal{D}_g =]-1,0[\cup]0,+\infty[$ comme somme, composées et produit de fonctions continues.

Correction 2.

1. **Étude de la continuité de la fonction f définie par** $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \textbf{si } x>0 \\ 0 & \textbf{sinon} \end{cases}$ **:**
   - Domaine de définition : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$.
   - Continuité sur $\mathbb{R}^{+\star}$: la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme composée de fonctions continues.
   - Continuité en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} e^{-x} = 1$ et $f(0)=0$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$ et donc la fonction f n'est pas continue en 0.

   Conclusion : La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ mais elle n'est pas continue en 0.
2. **Étude de la continuité de la fonction g définie par** $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-4x)}{2x} & \textbf{si } x<0 \\ 1 & \textbf{si } x=0 \\ \dfrac{e^x-1}{x} & \textbf{si } x>0 \end{cases}$ **:**
   - Domaine de définition : si $x<0$, on a bien toujours $1-4x>0$ et $2x \neq 0$. De même, si $x>0$, on a bien toujours $x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.
   - Continuité sur $\mathbb{R}^\star$: La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme somme et quotient de fonctions continues et sur $\mathbb{R}^{-\star}$ comme somme, composée et quotient de fonctions continues. Ainsi elle est continue sur $\mathbb{R}^\star$.
   - Continuité en 0 :
     - ⋆ Par substitution, on a : $\ln(1-4x) \underset{0}{\sim} -4x$ et par quotient d'équivalents : $\dfrac{\ln(1-4x)}{2x} \underset{0}{\sim} -2$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -2$. Comme $g(0) = 1 \neq -2$, la fonction g n'est pas continue à gauche en 0 et ainsi elle n'est pas continue en 0.
     - ⋆ D'après les équivalents usuels et par quotient d'équivalents, on a : $\dfrac{e^x-1}{x} \underset{0}{\sim} 1$ et ainsi $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1 = g(0)$. Donc la fonction g est continue à droite en 0.

   Conclusion : La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^\star$ et à droite en 0 mais elle n'est pas continue en 0.
3. **Étude de la continuité de la fonction h définie par** $h(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^2+4x}{1+x} & \textbf{si } x<0 \\ 1 & \textbf{si } x=0 \\ x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \textbf{si } x>0 \end{cases}$ **:**

- Domaine de définition : Pour tout $x > 0$, on a bien que $x \neq 0$. Par contre, sur $\mathbb{R}^{-\star}$, la fonction h est bien définie si $1 + x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Continuité sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$: La fonction h est continue sur $\mathbb{R}^{-\star} \setminus \{-1\}$ comme quotient de fonctions polynomiales et elle est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme quotient, composée et produit de fonctions continues. Ainsi la fonction h est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.
- Continuité en 0 :
  - ⋆ $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = 0$ par propriétés sur les sommes et quotient de limites. Comme $f(0) = 1 \neq 0$, la fonction h n'est pas continue à gauche en 0 et donc elle n'est pas continue en 0.
  - ⋆ Pour tout $x > 0$, on a : $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -x \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$ car $x > 0$. De plus $\lim\limits_{x \to 0^+} -x = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ et ainsi d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 0$. Comme $h(0) = 1 \neq 0$, la fonction h n'est pas non plus continue à droite en 0.

Conclusion : La fonction h est continue sur $\mathcal{D}_h \setminus \{0\}$ mais elle n'est pas continue en 0.

Correction 3.

1. Étude de la fonction f :
   - La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Étude de la continuité de f :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ comme quotient et composée de fonctions continues.
     - ⋆ La fonction f est continue sur $]-\infty, 0]$ comme fonction polynomiale. En particulier elle est donc continue à gauche en 0 et on a : $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$.
     - ⋆ Étude de la continuité en 0 : la fonction f est définie par un raccord en 0, on doit donc étudier la continuité en ce point en repassant par la définition, à savoir par un calcul de limite. On a déjà que : $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$. Étude de la limite à droite en 0 : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ par propriétés sur les quotient et composée de limites. Ainsi on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ donc la fonction f est bien continue en 0.

   La fonction f est ainsi continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.
2. Étude de la fonction g :
   - La fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}$: $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$. En effet pour $x \neq 0$, la fonction g est bien définie si et seulement si : $e^{x^2} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ ce qui est bien le cas.
   - Étude de la continuité de g :
     - ⋆ La fonction g est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues.
     - ⋆ Étude de la continuité en 0 : la fonction g est définie par un raccord en 0, on doit donc étudier la continuité en ce point en repassant par la définition, à savoir par un calcul de limite. On a par définition que : $g(0) = 2$. De plus, pour tout $x \neq 0$, on a : $g(x) = \frac{\sin^2(x)}{e^{x^2} - 1}$. Avec les équivalents usuels en 0, on a : $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ puis par produit d'équivalents : $\sin^2(x) \underset{0}{\sim} x^2$. De plus par substitution : $e^{x^2} - 1 \underset{0}{\sim} x^2$. Ainsi par quotient d'équivalents : $g(x) \underset{0}{\sim} 1$. Ainsi $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. Comme $1 \neq g(0)$, la fonction g n'est pas continue en 0.

   La fonction g est ainsi continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et n'est pas continue en 0.

Correction 4. La fonction h est définie par : $h(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & \text{si } -1 < x < 1, \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1. \end{cases}$ Ainsi la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. De plus, elle est continue sur $]-1, 1[$ comme somme et composée de fonctions continues et elle est continue sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ comme fonction polynomiale. Comme cette fonction est définie par deux raccords, on doit étudier la continuité en -1 et en 1 en repassant par la définition, à savoir avec les limites.

- Étude en -1 : La fonction h est continue à gauche en -1 avec $f(-1) = a - b + c = \lim_{x \to -1^-} f(x)$. De plus : $\lim_{x \to -1^+} h(x) = \lim_{x \to -1^+} \sqrt{1-x^2} = 0$ par propriété sur les somme et composée de limites. Ainsi, pour que h soit continue en -1, on doit avoir : $a - b + c = 0$.
- Étude en 1 : La fonction h est continue à droite en 1 avec $f(1) = a + b + c = \lim_{x \to 1^+} f(x)$. De plus : $\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0$ par propriété sur les somme et composée de limites. Ainsi, pour que h soit continue en 1, on doit avoir : $a + b + c = 0$.

Ainsi, on doit prendre a, b et c tels que : $\begin{cases} a - b + c & = & 0 \\ a + b + c & = & 0. \end{cases}$ La résolution de ce système linéaire donne : $\begin{cases} a - b + c & = & 0 \\ a + b + c & = & 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c & = & 0 \\ 2b & = & 0. \end{cases}$ Ainsi, si on prend par exemple : $b = 0$, $a = 1$ et $c = -1$, ces trois réels permettent que la fonction h soit bien continue en -1 et en 1. Et ainsi elle sera bien continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Correction 5.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On distingue deux cas :
   - Cas 1 : si $f(x) > g(x)$:
     On a alors d'un côté que : $\max(f(x), g(x)) = f(x)$. De l'autre côté, on a aussi : $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$ car $f(x) - g(x) > 0$. Et ainsi, on a : $\frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} = \frac{f(x) + g(x) + f(x) - g(x)}{2} = f(x)$.
     Donc dans ce cas, on a bien que : $\max(f(x), g(x)) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} = f(x)$.
   - Cas 1 : si $f(x) \leq g(x)$:
     On a alors d'un côté que : $\max(f(x), g(x)) = g(x)$. De l'autre côté, on a aussi : $|f(x) - g(x)| = -f(x) + g(x)$ car $f(x) - g(x) \leq 0$. Et ainsi, on a : $\frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} = \frac{f(x) + g(x) - f(x) + g(x)}{2} = g(x)$. Donc dans ce cas aussi, on a bien que : $\max(f(x), g(x)) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} = g(x)$.

   Ainsi dans tous les cas, on a bien que : $\max(f(x), g(x)) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$.
2. Comme la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier et que par hypothèse les fonctions f et g sont bien continues sur $\mathbb{R}$, on a que la fonction $\max(f, g)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues.

II Existence d'un éventuel prologement par continuité

Correction 6.

1. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.
   - Étude de la continuité :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme composée de fonctions continues.
     - ⋆ Étude de la limite en 0 : comme la fonction cosinus n'admet pas de limite en l'infini, la fonction f n'admet pas de limite en 0. Ainsi f n'est pas prolongeable par continuité en 0.
2. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \frac{|x| \ln(1+x)}{e^{2x^2} - 1}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $1 + x > 0$ et $e^{2x^2} - 1 \neq 0$, à savoir si et seulement si : $x > -1$ et $x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.

- Étude de la continuité :
  - ⋆ La fonction f est continue sur $]-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$ comme composée, somme, produit et quotient de fonctions continues.
  - ⋆ Étude d'un éventuel prolongement par continuité en 0 :
    Par les équivalents usuels : $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, $e^{2x^2}-1 \underset{0}{\sim} 2x^2$ par substitution et par produit et quotient d'équivalents : $f_2(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{|x|}{2x}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\dfrac{1}{2}$. Les deux limites ne sont pas égales et ainsi il n'existe pas de limite en 0. Donc la fonction f n'est pas prolongeable par continuité en 0. Par contre elle est prolongeable par continuité à droite en 0 en posant : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln(1+x)}{e^{2x^2}-1} & \text{si } x>0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x=0. \end{cases}$ Et elle est aussi prolongeable par continuité à gauche en 0 en posant :
    $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x\ln(1+x)}{e^{2x^2}-1} & \text{si } -1<x<0 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } x=0. \end{cases}$
  - ⋆ Étude d'un éventuel prolongement par continuité en -1 : on a : $\lim\limits_{x\to -1} f_2(x) = -\infty$ par propriété sur les composée, somme, produit et quotient de limites. Ainsi f n'est pas prolongeable par continuité en -1 et $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$.

3. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \ln(\sqrt{x}-1) - \ln(x-1)$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x \geq 0$, $\sqrt{x}-1>0$ et $x-1>0$, à savoir $x>1$. Ainsi $\mathcal{D}_f =]1,+\infty[$.
   - Étude de la continuité :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathcal{D}_f$ comme composée et somme de fonctions continues.
     - ⋆ Étude d'un éventuel prolongement par continuité en 1 : on a : $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\ln 2$ par propriétés sur les somme, quotient et composée de limites. Ainsi la fonction f est bien prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = -\ln 2$.

   On obtient une fonction que l'on continue de noter f et qui est alors définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{x}-1) - \ln(x-1) & \text{si } x>1 \\ -\ln(2) & \text{si } x=1. \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $[1,+\infty[$ car elle est continue sur $]1,+\infty[$ comme composée et somme de fonctions continues et elle est continue en 1 par prolongement.

4. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x^2-1}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x>0$ et $x^2-1 \neq 0$. Ainsi, on obtient : $\mathcal{D}_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$.
   - Étude de la continuité :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ comme somme, produit et quotient de fonctions continues
     - ⋆ Étude d'un éventuel prolongement par continuité en 0 : par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$. Et ainsi par somme et quotient de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=0$. On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln x}{x^2-1} & \text{si } x>0,\ x\neq 1 \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$
     - ⋆ Étude d'un éventuel prolongement par continuité en 1 : on pose $X = x-1$ et on obtient que $f(x) = F(X) = \dfrac{1+X}{2+X} \times \dfrac{\ln(1+X)}{X}$. Par les équivalents usuels en 0, on a : $\dfrac{\ln(1+X)}{X} \underset{0}{\sim} 1$. Et ainsi

par propriétés sur les sommes, quotient et produit de limites, on obtient que : $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = \frac{1}{2}$.

On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} & \text{si } x > 0,\ x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1. \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $[0, +\infty[$ car elle est continue sur $]0, +\infty[\setminus\{1\}$ comme composée et somme de fonctions continues et elle est continue en 0 et en 1 par prolongement.

5. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$:**

   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $1 - x \neq 0$ et $1 - x^2 \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
   - Étude de la continuité :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$ comme sommes et quotients de fonctions continues.
     - ⋆ Étude de la limite en -1 : On peut tout de suite remarquer que $f(x) = \frac{-1}{1+x}$ en mettant tout sur le même d/'enominateur et en utilisant le fait que $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$. Ainsi par propriété sur les somme et quotient de limites, on obtient que $\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$. Ainsi f n'est pas prolongeable par continuité en -1 et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.
     - ⋆ Étude de la limite en 1 : Comme $f(x) = \frac{-1}{1+x}$, on obtient que : $\lim_{x\to 1} f(x) = -\frac{1}{2}$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = -\frac{1}{2}$.

   On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} & \text{si } x \neq 1,\ x \neq -1 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ car elle est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$ comme sommes et quotients de fonctions continues et elle est continue en 1 par prolongement.

6. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{1+x}}$:**

   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $1 + x > 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f =]-1, +\infty[$.
   - Étude de la continuité :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathcal{D}_f =]-1, +\infty[$ comme sommes, composée et quotient de fonctions continues.
     - ⋆ Étude de la limite en -1 : On peut tout de suite remarquer en factorisant le numérateur et en simplifiant avec le dénominateur que $f(x) = \sqrt{1+x} \times (x-3)$. Ainsi par propriété sur les sommes et produit de limites, on obtient que : $\lim_{x\to -1} f(x) = 0$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en -1 en posant $f(-1) = 0$.

   On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{1+x}} & \text{si } x > -1, \\ 0 & \text{si } x = -1 \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $[-1, +\infty[$ car elle est continue sur $]-1, +\infty[$ comme sommes, composée et quotient de fonctions continues et elle est continue en -1 par prolongement.

7. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - 1}$:**

- Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $\sqrt{1+x}-1 \neq 0$ et $1+x \geq 0$ Par un passage au carré, on obtient que $\sqrt{1+x}=1 \Leftrightarrow x=0$. Ainsi $\mathcal{D}_f=[-1,0[\cup]0,+\infty[$.
- Étude de la continuité :
  - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathcal{D}_f=[-1,0[\cup]0,+\infty[$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues.
  - ⋆ Étude de la limite en 0 : en utilisant les deux équivalents usuels et en les quotientant, on obtient que : $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{\frac{x}{2}}$. Ainsi $f(x) \underset{0}{\sim} 2$ et $\lim_{x \to 0} f(x)=2$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=2$.

On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1} & \text{si } x \neq 0, \\ 2 & \text{si } x=0 \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $[-1,+\infty[$ car elle est continue sur $[-1,+\infty[\setminus\{0,\}$ comme sommes, composée et quotient de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement.

8. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1-\cos(\sqrt{x})}{|x|}$:**

- Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x \geq 0$ et $x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^{+\star}$.
- Étude de la continuité :
  - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues.
  - ⋆ Étude de la limite en 0 : par l'équivalent usuel du cosinus et par substitution, on a : $1-\cos(\sqrt{x}) \underset{0}{\sim} \dfrac{(\sqrt{x})^2}{2}$. Ainsi par quotient $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}$ car $|x|=x$ car on est sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Ainsi $\lim_{x \to 0} f(x)=\dfrac{1}{2}$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=\dfrac{1}{2}$.

On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos(\sqrt{x})}{|x|} & \text{si } x>0, \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x=0 \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $\mathbb{R}^+$ car elle est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement.

9. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x)=x\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)$:**

- Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x \neq 0$ et $\dfrac{x^2-1}{x}>0$. On fait alors un tableau de signe. Ainsi $\mathcal{D}_f=]-1,0[\cup]1,+\infty[$.
- Étude de la continuité :
  - ⋆ La fonction f est continue sur $]-1,0[\cup]1,+\infty[$ comme somme, quotient, composée et produit de fonctions continues.
  - ⋆ Étude de la limite en -1 : par propriété sur les somme, quotient, composée et produit de limites, on obtient que $\lim_{x \to -1^+} f(x)=+\infty$. Ainsi la fonction f n'est pas prolongeable par continuité en -1 et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$.
  - ⋆ Étude de la limite en 0 : on a : $f(x)=x\ln|x^2-1|-x\ln|x|$. Par croissance comparée, on obtient donc que : $\lim_{x \to 0^-} x\ln|x|=0$. Et ainsi par propriété sur les sommes, composée et produit de limites, on obtient que $\lim_{x \to 0^-} f(x)=0$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=0$.
  - ⋆ Étude de la limite en 1 : par propriété sur les somme, quotient, composée et produit de limites, on obtient que $\lim_{x \to 1^+} f(x)=-\infty$. Ainsi la fonction f n'est pas prolongeable par continuité en 1 et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=1$.

On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $]-1,0]\cup]1,+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases} x\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right) & \text{si } x\in]-1,0[\cup]1,+\infty[, \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $]-1,0]\cup]1,+\infty[$ car elle est continue sur $]-1,0[\cup]1,+\infty[$ comme somme, quotient,composée et produit de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement.

10. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x)=x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x\neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^\star$.
   - Étude de la continuité :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^\star$ comme quotient, composée et produit de fonctions continues.
     - ⋆ Étude de la limite en 0 : On utilise le théorème des gendarmes : On a : $-1\leq\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq 1 \Leftrightarrow -x^2\leq x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq x^2$ car $x^2>0$. De plus $\lim\limits_{x\to 0}-x^2=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ et ainsi d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=0$.

   On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0, \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur $\mathbb{R}^\star$ comme quotient, composée et produit de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement.

11. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{6x^2+5x-4}{2x-1}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $2x-1\neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.
   - Étude de la continuité :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ comme sommes et quotient de fonctions continues
     - ⋆ Étude de la limite en $\dfrac{1}{2}$: en factorisant le numérateur, on obtient que : $f(x)=\dfrac{(2x-1)(3x+4)}{2x-1}=3x+4$. Ainsi par propriété sur les sommes de limites, on a : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=\dfrac{11}{2}$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en $\dfrac{1}{2}$ en posant $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{11}{2}$.

   On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases} \dfrac{6x^2+5x-4}{2x-1} & \text{si } x\neq\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{11}{2} & \text{si } x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ comme somme et quotient de fonctions continues et elle est continue en $\dfrac{1}{2}$ par prolongement.

12. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$:**
   - Domaine de définition : la fonction f est bien définie si $x\neq 0$ et $1+x^2\geq 0$ ce qui est toujours vrai comme somme de deux termes positifs. Ainsi $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^\star$.
   - Étude de la continuité :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^\star$ comme sommes, composée et quotient de fonctions continues
     - ⋆ Étude de la limite en 0 : En utilisant une substitution, on obtient que : $\sqrt{1+x^2}-1\underset{0}{\sim}\dfrac{x^2}{2}$. Puis par quotient d'équivalents, on obtient que $f(x)\underset{0}{\sim}\dfrac{x}{2}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=0$.

On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur $\mathbb{R}^\star$ comme sommes, composée et quotient de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement.

13. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x)=x^x=e^{x\ln x}$:**
    - Domaine de définition : la fonction f est bien définie si $x>0$. Ainsi $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^{+\star}$.
    - Étude de la continuité : La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme produit et composée de fonctions continues.
        - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme somme, composées et quotient de fonctions continues
        - ⋆ Étude de la limite en 0 : Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$. Ainsi par propriété sur la composition de limites, on obtient que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=1$.

    On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=\begin{cases}x^x & \text{si } x>0,\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $\mathbb{R}^+$ car elle est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme produit et composées de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement.

Correction 7.

- Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $e^x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^\star$.
- Limites aux bornes :
    - ⋆ Limite en $+\infty$: $f(x)=\dfrac{x^n}{e^x}\times\dfrac{1}{1-e^{-x}}$. Ainsi par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=0$. Puis par propriété sur les sommes, quotient et produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. Ainsi $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $+\infty$. On pourrait étudier la position relative.
    - ⋆ Limite en $-\infty$: tout dépend de la parité de n. Si n est pair, alors par propriété sur les somme et quotient de limites, on obtient que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et si n est impair, alors par propriété sur les somme et quotient de limites, on obtient que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. On pourrait faire l'étude des branches infinies.
    - ⋆ Limite en 0 : Par les équivalents usuels, on a : $e^x-1\underset{0}{\sim}x$ et ainsi on a : $f(x)\underset{0}{\sim}x^{n-1}$. Ainsi, on doit distinguer deux cas selon que $n=1$ ou $n>1$:
        - ∘ Si $n=1$ alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ et la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=1$. On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1} & \text{si } x\neq 0,\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases}$
        - ∘ Si $n\geq 2$ alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ et la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=0$. On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^n}{e^x-1} & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$
- Étude de la continuité : La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{-\star}$ et sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme somme et quotient de fonctions continues. De plus elle est continue en 0 par prolongement par continuité. Ainsi la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Correction 8.

- Domaine de définition : la fonction f est bien définie si et seulement si $x^{2n}-1\neq 0$, à savoir sur $\mathbb{R}$, on doit donc avoir $x\neq -1$ et $x\neq 1$. Ainsi $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.
- Étude des limites en -1 et en 1. **Méthode 1 :** on pose le changement de variable $X=x^2$. On a ainsi, lorsque x tend vers 1 ou -1, X qui tend vers 1. On doit donc étudier la limite de $\dfrac{e^X-e}{X^x-1}$ en 1. On pose alors $Y=X-1$ pour se ramener à 0. On a :
$$\frac{e^X-e}{X^x-1}=\frac{e^{Y+1}-e}{(1+Y)^n-1}=\frac{e(e^Y-1)}{(1+Y)^n-1}\underset{Y\to 0}{\sim}\frac{eY}{nY}=\frac{e}{n}.$$
Ainsi, on a $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}f(x)=\dfrac{e}{n}$. On peut donc prolonger f sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-e}{x^{2n}-1} & \text{si } x\notin\{-1,1\},\\ \dfrac{e}{n} & \text{si } x=1 \text{ ou } x=-1.\end{cases}$

  Méthode 2 :
  - ⋆ Limite en 1 : on reconnaît par exemple le quotient de deux taux d'accroissement : $f(x)=\dfrac{e^{x^2}-e}{x+1}\times\dfrac{x+1}{x^{2n}-1}$. La fonction $g:x\mapsto e^{x^2}$ est bien dérivable en 1 car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et on a : $g'(1)=2e$. La fonction $h:x\mapsto x^{2n}$ est bien dérivable en 1 car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et on a : $h'(1)=2n$ car $h'(x)=2nx^{2n-1}$ et $2n-1\geq 1$ car $n\geq 1$. Ainsi d'après le taux d'accroissement, on obtient que : $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\dfrac{g'(1)}{h'(1)}=\dfrac{e}{n}$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1)=\dfrac{e}{n}$.
  - ⋆ Limite en 1 : on reconnaît par exemple le quotient de deux taux d'accroissement : $f(x)=\dfrac{e^{x^2}-e}{x-1}\times\dfrac{x-1}{x^{2n}-1}$. La fonction $g:x\mapsto e^{x^2}$ est bien dérivable en -1 car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et on a : $g'(-1)=-2e$. La fonction $h:x\mapsto x^{2n}$ est bien dérivable en -1 car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et on a : $h'(1)=-2n$ car $h'(x)=2nx^{2n-1}$ et $2n-1\geq 1$ car $n\geq 1$. Ainsi d'après le taux d'accroissement, on obtient que : $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\dfrac{g'(-1)}{h'(-1)}=\dfrac{e}{n}$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en -1 en posant $f(-1)=\dfrac{e}{n}$. On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-e}{x^{2n}-1} & \text{si } x\notin\{-1,1\},\\ \dfrac{e}{n} & \text{si } x=1 \text{ ou } \ x=-1.\end{cases}$
- Étude de la continuité : la fonction f est ainsi continue sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ comme composées, sommes et quotient de fonctions continues et elle est continue en -1 et en 1 par prolongement par continuité.

Correction 9. On va montrer que pour $a>-1$, la fonction f est bien prolongeable par continuité en 0.

- La fonction f est bien définie si et seulement si $x\neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^\star$.
- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et sur $\mathbb{R}^{-\star}$ comme quotient, composée et produits de fonctions continues.
- Vérifions que si $a>-1$, alors la fonction f est prolongeable par continuité en 0 :
  - ⋆ En utilisant l'équivalent usuel en 0 : $\sin x\underset{0}{\sim}x$ et par produit d'équivalents, on sait que : $f(x)\underset{0}{\sim}|x|^a x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Ainsi il suffit de calculer la limite de la fonction $g:x\mapsto|x|^a x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0.
  - ⋆ Comme il y a le terme $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, on utilise soit le théorème des gendarmes, soit le corollaire du théorème des gendarmes. Ici on va utiliser le corollaire. On a : $|g(x)|\leq|x|^a\times|x|\Leftrightarrow|g(x)|\leq|x|^{a+1}$. Ainsi, on a :
    - ∘ Comme $a+1>0$ car par hypothèse $a>-1$, on a : $\lim\limits_{x\to0}|x|^{a+1}=0$.

- $\circ$ $\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ |g(x)| \leq |x|^{a+1}$.

  Ainsi d'après le corollaire du théorème des gendarmes, on obtient que : $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

- $\star$ Ainsi, comme les fonctions f et g sont équivalentes en 0, on vient de montrer que pour $a > -1$, on a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} |x|^a \sin(x) \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- Étude de la continuité : la fonction f est ainsi continue sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur $\mathbb{R}^\star$ comme composées et produits de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement par continuité.

III Applications des théorèmes sur la continuité

Correction 10. On ne demande pas ici d'expliciter les trois racines réelles juste de montrer qu'il en existe trois. Ainsi il faut résoudre $f(x) = 0$ pour $f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$ et cela fait donc penser au théorème de la bijection (et non le TVI car on va vouloir aussi l'unicité).

- La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.
- Comme elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$.
- Limites aux bornes : par le théorème des monômes de plus haut degré, on obtient que : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

- Il s'agit alors d'appliquer le théorème de la bijection sur les intervalles $]-\infty, -1]$, $[-1, 1]$ et $[1, +\infty[$. A faire.

Correction 11.

1. **Étudier la fonction $f : x \mapsto x^3 - x + 1$:**
   - La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
   - La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 - 1$.
   - Variations de f :

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$1 + \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$1 - \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites en $\pm\infty$ ont été obtenu par le théorème du monôme de plus haut degré.

2. **Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle $\alpha \in]-2, -1[$:**
   - Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-2, -1[$:
     - ⋆ La fonction f est continue sur]-2,-1[comme fonction polynomiale.
     - ⋆ La fonction f est strictement croissante sur $]-2, -1[$.
     - ⋆ $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = -5 < 0$ et $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = 1 > 0$.

     Ainsi d'après le théorème de la bijection, $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet sur }]-2,-1[\text{ une unique solution réelle n}}$
   - Vérifions que l'équation $f(x) = 0$ n'a pas d'autre solution sur $\mathbb{R}$:
     En appliquant de la même façon le théorème de la bijection sur chacun des intervalles où la fonction est strictement monotone, on montre que : $f(x) < 0$ sur $]-\infty, -2]$ et $f(x) > 0$ sur $[-1, +\infty[$ et ainsi $\boxed{\alpha \text{ est bien l'unique solution réelle à l'équation } f(x) = 0.}$
3. **Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près :** À faire avec la calculatrice en utilisant la méthode de dichotomie.

Correction 12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère la fonction f_n définie par pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^3 + 3x - n$.

1. **Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note u_n cette solution :**
   La fonction f_n est bien définie sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_n'(x) = 3x^2 + 3$. Ainsi $f_n'(x) > 0$ comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

   Les limites sont obtenu avec le théorème du monôme de plus haut degré. On a donc
   - La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.
   - La fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

   Ainsi d'après le théorème de la bijection, $\boxed{\text{l'équation } f_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution dans } \mathbb{R}.}$ On note u_n cette solution.
2. **Montrer que : $0 \leq u_n \leq n^{\frac{1}{3}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:**
   On a : $f_n(0) = -n < 0$ et $f_n(n^{\frac{1}{3}}) = 3n^{\frac{1}{3}} > 0$. Comme par définition de u_n, on a : $f_n(u_n) = 0$, on vient de montrer que : $f_n(0) < f_n(u_n) < f_n(n^{\frac{1}{3}})$. Or la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et ainsi on a :
   $$f_n(0) < f_n(u_n) < f_n(n^{\frac{1}{3}}) \Leftrightarrow 0 < u_n < n^{\frac{1}{3}}.$$
   Et donc on a aussi $\boxed{0 \leq u_n \leq n^{\frac{1}{3}}.}$
3. **Montrer que la suite est croissante :**
   Par définition de f_n, on a : $f_n(u_{n+1}) = (u_{n+1})^3 + 3u_{n+1} - n$. De plus par définition de la suite, on a aussi que :
   $$f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow (u_{n+1})^3 + 3u_{n+1} - n - 1 = 0 \Leftrightarrow (u_{n+1})^3 + 3u_{n+1} - n = 1.$$
   Ainsi on vient de montrer que : $f_n(u_{n+1}) = 1 > 0$. Comme $f_n(u_n) = 0$, on vient de prouver que : $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$ et comme la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a :
   $$f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n) \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n.$$
   Ainsi $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \text{ est croissante.}}$

4. (a) **Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $\left(\frac{u_n}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^3 = 1 - 3\frac{u_n}{n}$:**
On utilise la définition de la suite. En effet, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :
$$f_n(u_n) = 0 \Leftrightarrow u_n^3 + 3u_n - n = 0 \Leftrightarrow u_n^3 = n - 3u_n.$$
On divise alors cette égalité par $n > 0$ et on obtient que
$$\frac{u_n^3}{n} = 1 - 3\frac{u_n}{n} \Leftrightarrow \boxed{\left(\frac{u_n}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^3 = 1 - 3\frac{u_n}{n}.}$$

(b) **En déduire que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{3}}$ ainsi que la limite de la suite :**

- On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $0 \leq u_n \leq n^{\frac{1}{3}}$. Ainsi on a :
$$0 \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}.$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} = 0$, on obtient d'après le théorème des gendarmes que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 0$. Ainsi par somme de limites, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{u_n}{n} = 1$. On vient donc de prouver que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^3 = 1$ et par composition de limite (on compose par la fonction racine cubique continue sur $\mathbb{R}$), on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n^{\frac{1}{3}}} = 1$. On vient donc bien de prouver que $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{3}}.}$
- Par propriété sur les équivalents, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{3}} = +\infty$. Ainsi $\boxed{\text{la suite diverge vers } +\infty.}$

Correction 13. **Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(0) = g(1)$ et $f(1) = g(0)$. Démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ possède au moins une solution dans $[0,1]$:**
Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet au moins une solution dans $[0,1]$ est équivalent à montrer que l'équation $h(x) = 0$ avec $h : x \mapsto f(x) - g(x)$ admet au moins une solution dans $[0,1]$. On est dans le cas d'un exercice abstrait (on ne connaît pas l'expression explicite de la fonction) et l'on doit montrer l'existence d'une solution à une équation. On est donc dans le cadre typique du théorème des valeurs intermédiaires. On a donc

- La fonction h est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues car, par hypothèse, on sait que f et g sont continues sur $[0,1]$.
- On a : $h(0) = f(0) - g(0)$ et $h(1) = f(1) - g(1)$. Or $f(1) = g(0)$ et $g(1) = f(0)$. Ainsi on obtient que $h(1) = g(0) - f(0) = -h(0)$. Ainsi $h(0)$ et $h(1)$ sont de signes contraires donc il y en a forcément un positif et un négatif.

Ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une solution à l'équation $h(x) = 0$ sur $[0,1]$. Ainsi $\boxed{\text{l'équation } f(x) = g(x) \text{ possède au moins une solution dans } [0,1].}$ **Correction 14.**

1. Très classique. On cherche à montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution ce qui est équivalent à la résolution de $f(x) - x = 0$. On pose ainsi la fonction $h : x \mapsto h(x) = f(x) - x$ et on cherche alors à montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution. Comme on ne veut pas l'unicité, on peut se douter qu'il va falloir utiliser le TVI. On a en effet :
   - La fonction h est continue sur $[0,1]$ comme somme de deux fonctions continues car, par hypothèse la fonction f est continue sur $[0,1]$.
   - On a de plus : $h(0) = f(0) - 0 = f(0)$. Or comme la fonction f va de $[0,1]$ dans $[0,1]$, on a : $\forall x \in [0,1]$: $0 \leq f(x) \leq 1$. En particulier on a : $f(0) \geq 0$ donc $h(0) \geq 0$.
   On a aussi : $h(1) = f(1) - 1$. Or comme la fonction f va de $[0,1]$ dans $[0,1]$, on a : $\forall x \in [0,1]$: $0 \leq f(x) \leq 1$. En particulier on a : $f(1) \leq 1 \Leftrightarrow f(1) - 1 \leq 0$ donc $h(1) \leq 0$.

Ainsi d'après le TVI, il existe donc $c \in [0,1]$ tel que : $h(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$. Ainsi c est un point fixe de f.

2. Très classique. Même type de raisonnement que ci-dessus sauf que l'on veut l'unicité du point fixe, il va donc falloir utiliser le théorème de la bijection. On cherche à montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique ce qui est équivalent à la résolution de $f(x)-x = 0$. On pose ainsi la fonction $h : x \mapsto h(x) = f(x)-x$ et on cherche alors à montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution. On a alors :
   - La fonction h est continue sur $[0,1]$ comme somme de deux fonctions continues car, par hypothèse la fonction f est continue sur $[0,1]$.
   - La fonction f est décroissante sur $[0,1]$. Il en est de même pour la fonction $x \mapsto -x$. Ainsi la fonction h est décroissante sur $[0,1]$ comme somme de deux fonctions décroissantes.
   - On a de plus : $h(0) = f(0) - 0 = f(0)$. Or comme la fonction f va de $[0,1]$ dans $[0,1]$, on a : $\forall x \in [0,1]$: $0 \leq f(x) \leq 1$. En particulier on a : $f(0) \geq 0$ donc $h(0) \geq 0$.
     On a aussi : $h(1) = f(1) - 1$. Or comme la fonction f va de $[0,1]$ dans $[0,1]$, on a : $\forall x \in [0,1]$: $0 \leq f(x) \leq 1$. En particulier on a : $f(1) \leq 1 \Leftrightarrow f(1) - 1 \leq 0$ donc $h(1) \leq 0$.

   Ainsi d'après le théorème de la bijection, il existe donc un unique $c \in [0,1]$ tel que : $h(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$. Ainsi c est l'unique point fixe de f.

Correction 15. On suppose que f possède des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$ que l'on note respectivement l et l'. Ainsi par définition d'une limite, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0,\ \forall x \geq A : |f(x) - l| \leq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall \varepsilon' > 0, \exists A' > 0,\ \forall x \leq -A' : |f(x) - l'| \leq \varepsilon'.$$

Ainsi si on prend par exemple $\varepsilon = \varepsilon' = 1$, on a l'existence de $A > 0$ et de $A' > 0$ tel que :

- $\forall x \geq A :\ -1 \leq f(x) - l \leq 1 \Leftrightarrow -1 + l \leq f(x) \leq 1 + l$
- $\forall x \leq -A' :\ -1 \leq f(x) - l' \leq 1 \Leftrightarrow -1 + l' \leq f(x) \leq 1 + l'$.

Ainsi on a donc montré que sur $]-\infty, A']$ et sur $[A, +\infty[$, la fonction f est bien bornée. Il reste donc à étudier l'intervalle $[A', A]$. Mais la fonction f est alors continue sur le segment $[A', A]$, ainsi d'après le théorème sur les fonctions continues sur un segment, la fonction f est bornée sur cet intervalle. Ainsi on a bien montré que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$ tout entier. **Correction 16.** On suppose donc par l'absurde que pour tout $x \in [0,1]$:

$f(x) \neq g(x)$.

1. On pose la fonction $h : x \mapsto h(x) = f(x) - g(x)$. Comme pour tout $x \in [0,1]$: $f(x) \neq g(x)$, on obtient que pour tout $x \in [0,1]$: $h(x) \neq 0$. Ainsi la fonction h ne s'annule pas sur $[0,1]$. On peut donc appliquer le corollaire du TVI. En effet on a :
   - La fonction h est continue sur $[0,1]$ comme somme de deux fonctions continues.
   - Pour tout $x \in [0,1]$: $h(x) \neq 0$.

   Ainsi d'après le corollaire du TVI, on sait que la fonction h garde un signe constant sur $[0,1]$: soit h est toujours strictement positive sur $[0,1]$, soit h est toujours strictement négative sur $[0,1]$. On peut donc supposer par exemple que h reste toujours strictement positive sur $[0,1]$ (le même type de raisonnement donnerait le même résultat si h reste toujours strictement négative). Ainsi pour tout $x \in [0,1]$, on a : $f(x) > g(x)$.
2.
   - La fonction h est continue sur le segment $[0,1]$ donc d'après le théorème sur les fonctions continues sur un segment, on sait que h est bornée et qu'elle atteint ses bornes. En particulier, il existe un minimum de h sur $[0,1]$ que l'on note m. Ainsi on a par définition d'un minimum :

     $$\forall x \in [0,1],\ h(x) \geq m \Leftrightarrow \forall x \in [0,1],\ f(x) \geq g(x) + m.$$

   - Il reste donc à montrer que $m > 0$. Comme m est le minimum de h sur $[0,1]$, on sait qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que : $m = h(c)$. Or on a supposé que h reste toujours strictement positive. Ainsi $m = h(c) > 0$.

   Ainsi on a bien montré qu'il existe $m > 0$, tel que pour tout $x \in [0,1]$: $f(x) \geq g(x) + m$.
3.
   - On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$ la propriété $\mathcal{P}(n) :\ \forall x \in [0,1],\ f^n(x) \geq g^n(x) + mn$.

- Initialisation pour $n=1$: d'un côté, on a : pour tout $x \in [0,1]$: $f(x)$ et de l'autre côté, on a pour tout $x \in [0,1]$: $g(x)+m$. D'après la question précédente on sait que pour tout $x \in [0,1]$: $f(x) \geq g(x)+m$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a montré à la question précédente que pour tout $x \in [0,1]$, on a : $f(x) \geq g(x)+m$. En prenant $x = f^n(x) \in [0,1]$, on obtient que : $f(f^n(x)) \geq g(f^n(x))+m$. Or on sait aussi que $f \circ g = g \circ f$ donc par une récurrence imédiate on pourrait montrer que $g \circ f^n = f^n \circ g$. Ainsi, on a pour tout $x \in [0,1]$: $g(f^n(x))+m = f^n(g(x))+m$. Ainsi, on vient de montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a : $f^{n+1}(x) \geq f^n(g(x))+m$. Mais par hypothèse de récurrence, on sait aussi que pour tout $x \in [0,1]$, on a : $f^n(x) \geq g^n(x)+nm$. Ainsi en prenant $x = g(x) \in [0,1]$, on a : $f^n(g(x)) \geq g^n(g(x))+nm$, à savoir : $f^n(g(x)) \geq g^{n+1}(x)+nm$. Finalement, on a donc montré que pour tout $x \in [0,1]$: $f^{n+1}(x) \geq f^n(g(x))+m \geq g^{n+1}(x)+nm+m$ donc on a bien : $f^{n+1}(x) \geq g^{n+1}(x)+(n+1)m$ et ceci pour tout $x \in [0,1]$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour tout $x \in [0,1]$: $f^n(x) \geq g^n(x)+nm$.

4. On fixe alors $x \in [0,1]$ et on regarde ce que l'on obtient si on fait tendre n vers $+\infty$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $g^n(x)+nm = nm\left(1+\dfrac{g^n(x)}{nm}\right)$. Or la suite $(g^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car elle est toujours comprise entre 0 et 1 et cela pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et comme $m>0$, on a : $0 \leq g^n(x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{g^n(x)}{nm} \leq \dfrac{1}{nm}$. Ainsi en utilisant le théorème des gendarmes, on montre que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{g^n(x)}{nm} = 0$. Ainsi par propiétés sur les somme et produit de limites et comme $m>0$, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} g^n(x)+nm = +\infty$. Ainsi, on a
   - $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n(x) \geq g^n(x)+nm$.
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} g^n(x)+nm = +\infty$.

   Ainsi d'après le théorème de minoration, on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f^n(x) = +\infty$. Absurde car on sait aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq f^n(x) \leq 1$. Ainsi on a bien aboutit à une contradiction et donc il existe bien $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Correction 17.

1. Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si pour $x<0$, on a : $x^2-1 \neq 0$. Ainsi on a : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2. Limites aux bornes du domaine :
   - Limite en $-\infty$: en utilisant le théorème du monôme de plus haut degré, on obtient : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x^2-1} = 1$. Ainsi $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ au voisinage de $-\infty$.
   - Limite en $+\infty$: en utilisant le théorème du monôme de plus haut degré, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = 1$. Ainsi $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ au voisinage de $+\infty$.
   - Étude en -1 : par propriétés sur les somme et quotient de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x^2}{x^2-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{x^2}{x^2-1} = -\infty$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$.
3. Continuité de la fonction f :
   - La fonction f est continue sur $]-\infty,-1[$ et sur $]-1,0[$ comme somme et quotient de fonctions continues.
   - La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme somme et quotient de fonctions continues. En particulier, on a que : $f(0) = 0 = \lim\limits_{x\to0^+} f(x)$.
   - Étude de la continuité en 0 : comme la fonction f est définie par un raccord en 0, on doit étudier la continuité de f en 0 par les limites. On a déjà que la fonction f est continue à droite en 0 avec $f(0) = 0 = \lim\limits_{x\to0^+} f(x)$. Étude de la limite à gauche en 0 : on a : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x^2}{x^2-1} = 0$ par propriétés sur les somme et quotient de limites. Ainsi, on a : $f(0) = 0 = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ et donc f est continue en 0.

Ainsi la fonction f est continue sur son ensemble de définition.

4. Dérivabilité de la fonction f :
   - La fonction f est dérivable sur $]-\infty,-1[$ et sur $]-1,0[$ comme somme et quotient de fonctions dérivables. De plus, pout tout $x<0$ avec $x\neq -1$, on a : $f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$.
   - La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme et quotient de fonctions dérivables. De plus, pout tout $x\geq 0$, on a : $f'(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$. En particulier, elle est donc dérivable à droite en 0 et on a : $f'_d(0)=0$.
   - Étude de la dérivabilité en 0 : on étudie pour cela le taux d'accroissement quand x tend vers 0 par valeur inférieure. On a pour tout $x<0$, $x\neq -1$: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{x}{x^2-1}$. Ainsi par propriété sur les somme et quotient de limites, on obtient que : $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$. Ainsi la fonction f est aussi dérivable à gauche en 0 avec $f'_g(0)=0$. Comme $f'_g(0)=0=f'_d(0)$, la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

   On a donc montré que la fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x\neq -1$, on a : $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} & \text{si } x>0\\[2mm] \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2} & \text{si } x<0,\ x\neq -1\\[2mm] 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$

5. Variations de f : On remarque ainsi que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x\neq -1$, on a : $f'(x)\geq 0$ et $f'(x)>0$ si $x\notin\{-1,0\}$. Ainsi la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty,-1[$ et sur $]-1,+\infty[$. On obtient

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
f			$+\infty$ $\Vert$		1
		↗	$\Vert$	↗	
	1		$\Vert$ $-\infty$		

6. Théorème de la bijection :
   - Étude sur $]-\infty,-1[$:
     - ⋆ La fonction f est continue sur $]-\infty,-1[$ comme somme et quotient de fonctions continues.
     - ⋆ La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty,-1[$.
     - ⋆ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$ et $\displaystyle\lim_{x\to-1^-}f(x)=+\infty$.

     Ainsi d'après le théorème de la bijection, la fonction f est bijective de $]-\infty,-1[$ dans $]1,+\infty[$.
   - Étude sur $]-1,+\infty[$:
     - ⋆ La fonction f est continue sur $]-1,+\infty[$ comme somme et quotient de fonctions continues sur $]-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$ et par raccord continu en 0.
     - ⋆ La fonction f est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$.
     - ⋆ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$ et $\displaystyle\lim_{x\to-1^+}f(x)=-\infty$.

     Ainsi d'après le théorème de la bijection, la fonction f est bijective de $]-1,+\infty[$ dans $]-\infty,1[$.
   - Ainsi la fonction f est bijective de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

7. Propriétés de la réciproque : On a la continuité de f^{-1} sur $]-\infty,1[$ et sur $]1,+\infty[$ comme réciproque d'une fonction continue. On a les variations suivantes pour f^{-1} :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f^{-1}	$-1 \nearrow +\infty$	$\Vert$	$-\infty \nearrow -1$

8. Expression de la réciproque : on sait donc que pour tout $x \neq -1$ et tout $y \neq 1$, on a : $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$. Comme f a deux expressions différentes, on doit donc faire deux cas :
   - Cas 1 : si $x \geq 0$ et ainsi en utilisant le théorème de la bijection, on montre que $0 \leq y < 1$: on a alors
   $$y = f(x) \Leftrightarrow x^2 = y(1 + x^2) \Leftrightarrow (1 - y)x^2 = y.$$
   Comme $y < 1$, on a : $1 - y \neq 0$ et on peut bien diviser par $1 - y$. On obtient alors : $y = f(x) \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{y}{1 - y}$. De plus, comme $y \geq 0$ et $y < 1 \Leftrightarrow 1 - y > 0$, les deux membres sont bien positifs et on peut composer par la fonction racine carrée. On obtient : $x = \sqrt{\dfrac{y}{1 - y}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{y}{1 - y}}$. Mais comme $x \geq 0$, on obtient finalement que :
   $$\forall x \geq 0, \forall y \in [0, 1[: y = f(x) \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{y}{1 - y}}.$$
   - Cas 2 : si $x < 0$ avec $x \neq -1$ et ainsi en utilisant le théorème de la bijection, on montre que soit $y > 1$, soit $y < 0$. On a alors :
   $$y = f(x) \Leftrightarrow x^2 = y(x^2 - 1) \Leftrightarrow (1 - y)x^2 = -y.$$
   Comme $y > 1$ ou $y < 0$, on a dans tous les cas : $1 - y \neq 0$ et on peut bien diviser par $1 - y$. On obtient alors : $y = f(x) \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{-y}{1 - y} = \dfrac{y}{y - 1}$. Or si $y > 1$ alors $\dfrac{y}{y - 1} > 0$ comme quotient de deux termes strictement positifs. Et si $y < 0$ alors $\dfrac{y}{y - 1} > 0$ comme quotient de deux termes strictement négatifs. Ainsi dans tous les cas $\dfrac{y}{y - 1} > 0$. Les deux membres sont bien positifs et on peut composer par la fonction racine carrée. On obtient : $x = \sqrt{\dfrac{y}{y - 1}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{y}{y - 1}}$. Mais comme $x < 0$, on obtient finalement que :
   $$\forall x < 0,\ x \neq -1, \forall y > 1 \text{ ou } y < 0 : y = f(x) \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{y}{y - 1}}.$$

   Finalement on obtient pour f^{-1} l'expression suivante : $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{1 - x}} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -\sqrt{\dfrac{x}{x - 1}} & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 1. \end{cases}$

Correction 18. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On pose : $\forall x \in]a, b[,\ f(x) = \dfrac{1}{x - a} + \dfrac{1}{x - b}$.

1. (a) **Démontrer que f réalise une bijection de $]a, b[$ sur un intervalle J que l'on précisera :**
   - Étude de la fonction f :
   La fonction f est bien définie sur $]a, b[$ et elle est dérivable sur $]a, b[$ comme composées et somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in]a, b[$, on a :
   $$f'(x) = \frac{-1}{(x - a)^2} + \frac{-1}{(x - b)^2} = -\left[\frac{1}{(x - a)^2} + \frac{1}{(x - b)^2}\right].$$
   Ainsi $f' < 0$ comme somme de deux termes strictement négatifs. On obtient les variations suivantes sur $]a, b[$

x	a	b
f	$+\infty$ $\searrow$	$-\infty$

Les limites en a et b sont obtenues par propriétés sur les quotients et somme de limites.

- Existence de f^{-1} :
  - ⋆ La fonction f est continue sur $]a,b[$ comme composées et somme de fonctions continues.
  - ⋆ La fonction f est strictement d/'ecroissante sur $]a,b[$.
  - ⋆ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = -\infty$.

  Ainsi d'après le théorème de la bijection, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bijective de }]a,b[\text{ sur } \mathbb{R}.}$ On a donc l'existence de $f^{-1} : \mathbb{R} \to]a,b[$.

(b) **Que peut-on dire de l'application f^{-1} ? :**

- La fonction f^{-1} est continue sur $\mathbb{R}$ comme réciproque d'une fonction continue.
- La fonction f^{-1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ comme réciproque d'une fonction strictement décroissante.
- $\forall x \in]a,b[,\ \forall y \in \mathbb{R} :\ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

2. **Déterminer f^{-1} dans le cas $a = -1$ et $b = 1$:**

On a donc $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$. On sait que f est bijective de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ et donc on a en particulier que

$$\forall x \in]-1,1[,\ \forall y \in \mathbb{R} :\ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

On a donc :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2-1} - y = 0 \Leftrightarrow \frac{-yx^2+2x+y}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow -yx^2+2x+y = 0.$$

Vérifions donc que pour tout $y \in \mathbb{R}$ fixé, cette équation a une unique solution $x \in]-1,1[$.

- CAS 1 si $y = 0$:
  L'équation à résoudre devient : $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Ainsi il existe bien une unique solution dans $]-1,1[$.
- CAS 2 : si $y \neq 0$:
  On doit alors résoudre une vraie équation du second ordre et on obtient que le discriminant vaut : $\Delta = 4y^2 + 4 = 4(1+y^2)$. Ainsi $\Delta > 0$ comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Il existe donc deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{1+y^2}}{y}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}$. Il reste alors à vérifier que seule l'une des deux est entre -1 et 1 strictement.
  - ⋆ Résolution de : $x_1 < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{1+y^2}}{y} < 1$:
    On a :
    $$\frac{1-\sqrt{1+y^2}}{y} < 1 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{1+y^2}-y}{y} < 0.$$
    Étude du signe de $1 - y - \sqrt{1+y^2}$:
    $$1 - y - \sqrt{1+y^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - y > \sqrt{1+y^2}.$$
    On fait alors deux cas :
    - ∘ CAS a) : si $1 - y < 0 \Leftrightarrow y > 1$: pas de solution car une racine carrée est toujours positive ou nulle, elle ne peut donc pas être strictement inférieure à un nombre strictement négatif. Ainsi si $y > 1$, on a : $1 - y - \sqrt{1+y^2} \leq 0$.
    - ∘ CAS b) : si $1 - y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 1$: on peut alors passer au carré des deux côtés car la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que les termes sont alors positifs. On obtient que :
      $$1 - y > \sqrt{1+y^2} \Leftrightarrow 1 + y^2 - 2y > 1 + y^2 \Leftrightarrow -2y > 0 \Leftrightarrow y < 0.$$
      Ainsi sur $]-\infty, 0[$, on a : $1 - y - \sqrt{1+y^2} > 0$ et sur $[0,1]$, on a : $1 - y - \sqrt{1+y^2} \leq 0$.

On peut donc faire un tableau de signe et on a :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$1-\sqrt{1+y^2}-y$		$+$	0	-	
y		-	0	$+$	
$x_1 - 1$		-	$\|$	-	

Ainsi pour tout $y \in \mathbb{R}^\star$, on a : $x_1 < 1$.

- $\star$ On peut montrer de la même façon que pour tout $y \in \mathbb{R}^\star$, on a : $x_1 > -1$.
- $\star$ On peut montrer de la même façon que pour tout $y \in \mathbb{R}^\star$, on a : $x_2 \notin]-1,1[$

Ainsi dans le cas où $y \in \mathbb{R}^\star$, il existe bien une unique solution dans $]-1,1[$ qui est donnée par $x = x_1 = \dfrac{1-\sqrt{1+y^2}}{y}$.

On obtient donc l'expression de f^{-1} suivant :

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1+y^2}}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}}$$

Correction 19. On note f la fonction définie par $f(x) = e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)}$.

1. **Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f la fonction ainsi prolongée :**
   La fonction f est définie sur $]0,+\infty[$.
   Étude de la limite en 0 :
   Par propriété sur les somme et les produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln(x) = -\infty$. Puis par propriété sur la composition de limites, on a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Donc la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. La nouvelle fonction est encore notée f et elle est définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2. **Étudier la fonction :**
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables et pour tout $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)}}{x^2}[1+x-\ln x]$. Comme pour tout $x > 0$, on a : $\dfrac{e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)}}{x^2} > 0$, le signe de f' ne dépend que du signe de la fonction $g : x \mapsto 1+x-\ln x$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme somme de fonction dérivables et pour tout $x > 0$: $g'(x) = \dfrac{x-1}{x}$. On obtient donc :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	$+$	
g		$\searrow$	2	$\nearrow$	

Ainsi 2 est le minimum global de g et donc pour tout $x>0$: $g(x)>0$. Ainsi f' est strictement positive sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et on obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

La limite en $+\infty$ de f s'obtient par somme, produit et composée de limites.

3. **On définit alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0>0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$. Déterminer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
   - On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l\in\mathbb{R}^+$.
     - ⋆ Étude de la limite de $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$:
       - ∘ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l\in\mathbb{R}^+$.
       - ∘ La fonction f est continue en l car la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$. En effet elle est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme somme, produit et composée de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement par continuité.

       Ainsi d'après le théorème sur les suite et fonction, on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=f(l)$.
     - ⋆ De plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=l$ car la suite converge vers l d'après ce que l'on a supposé.
     - ⋆ Ainsi en passant à la limite dans l'égalité : $u_{n+1}=f(u_n)$, on obtient que : $\boxed{l=f(l)}$.
   - Il reste alors à résoudre $f(l)=l$:
     - ⋆ Comme $f(0)=0$, 0 est un point fixe de f.
     - ⋆ Pour tout $x\neq 0$, on doit alors résoudre : $e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)}=x$. On a

$$e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)}=x \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x=\ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}=0 \Leftrightarrow x=1.$$

     Ainsi 1 est aussi point fixe de la fonction f.

   On vient donc de prouver que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ a deux limites éventuelles qui sont 0 et 1.}}$

Correction 20. **On note f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$.**

1. **Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f la fonction ainsi prolongée :**
   La fonction f est bien définie si $e^x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^\star$.
   Étudions la limite en 0 : en utilisant les équivalents usuels, on a : $e^x-1\underset{0}{\sim}x$ et ainsi par quotient d'équivalents, on a : $f(x)\underset{0}{\sim}1$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$. Donc la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=1$. La nouvelle fonction est encore notée f et elle est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

2. **On définit alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$. Déterminer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
   - On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l\in\mathbb{R}$.
     - ⋆ Étude de la limite de $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$:
       - ∘ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

- ◦ La fonction f est continue en l car la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. En effet elle est continue sur $\mathbb{R}^\star$ comme somme et quotient de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement par continuité.

  Ainsi d'après le théorème sur les suite et fonction, on sait que : $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.
- ⋆ De plus : $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ car la suite converge vers l d'après ce que l'on a supposé.
- ⋆ Ainsi en passant à la limite dans l'égalité : $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient que : $\boxed{l = f(l)}$.

- Il reste alors à résoudre $f(l) = l$:
  - ⋆ Comme $f(0) = 1 \neq 0$, 0 n'est pas point fixe de f.
  - ⋆ Pour tout $l \neq 0$, on doit alors résoudre : $\dfrac{l}{e^l - 1} = x$. On a

$$\frac{l}{e^l - 1} = x \Leftrightarrow l = l(e^l - 1) \Leftrightarrow 1 = e^l - 1 \Leftrightarrow e^l = 2 \Leftrightarrow l = \ln 2,$$

car on a $l \neq 0$. Ainsi la seule limite éventuelle est $\boxed{l = \ln 2}$.

IV Résolution d'équations fonctionnelles

Correction 21.

1.
   - On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
   - Initialisation : pour $n = 0$: d'un côté, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x)$ et de l'autre côté, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g\left(\dfrac{x}{2^0}\right) = g(x)$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque. Par hypothèse de récurrence, on sait que : $g(x) = g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$. Mais si on pose $X = \dfrac{x}{2n}$, on sait aussi par hypothèse sur g que : $g(X) = g\left(\dfrac{X}{2}\right)$, à savoir : $g\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = g\left(\dfrac{x}{2^n} \times \dfrac{1}{2}\right) = g\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)$. On vient donc de montrer que : $g(x) = g\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = g\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)$ donc on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = g\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)$. Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On sait donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $g(x) = g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$. Or on a : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ et par propriété sur le produit de limites. On a donc
   - $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$
   - La fonction g est continue en 0 par hypothèse.

   Ainsi d'après le théorème sur les suites et les fonctions, on obtient que : $\lim_{n\to+\infty} g\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = g(0)$. Comme on sait aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $g(x) = g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ et que $\lim_{n\to+\infty} g(x) = g(x)$ car $g(x)$ ne dépend pas de n, on a par unicité de la limite que : $g(x) = g(0)$. Comme ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on vient bien de montrer que g est constante tout le temps égale à $g(0)$.

Correction 22. On fait ici un raisonnement par analyse-synthèse. **Analyse :** On considère une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie la condition : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. On a : $f(0+0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 2f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$.
2. (a) Montrons que f est une fonction impaire :

- $\mathbb{R}$ est bien centré en 0 et f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x+(-x)) = f(x) + f(-x)$ par hypothèse sur f. Mais $f(x+(-x)) = f(0) = 0$ d'après la question précédente. Ainsi on vient de montrer que $f(x) = -f(-x)$ et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi la fonction f est bien une fonction impaire.

(b) Montrons alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(nx) = nf(x)$.

- On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(nx) = nf(x)$.
- Initialisation : pour $n = 0$: d'un côté, on a : $f(0 \times x) = f(0) = 0$ et de l'autre côté, on a : $0 \times f(x) = 0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x)$ par hypothèse sur la fonction f. Puis par hypothèse de récurrence, on sait que : $f(nx) = nf(x)$. Ainsi, on obtient que : $f((n+1)x) = f(x) + nf(x) = (n+1)f(x)$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(nx) = nf(x)$.

(c) Soit alors $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. On a ainsi $-n \in \mathbb{N}$ et on vient donc de démontrer que : $f(-nx) = -nf(x)$ car $-n \in \mathbb{N}$ et en appliquant le résultat de la récurrence ci-dessus. En utilisant alors de plus le fait que la fonction f est impaire, on sait alors que : $f(nx) = f(-(-nx)) = -f(-nx) = -(-nf(x)) = nf(x)$ ce qui est le résultat voulu.

Ainsi, on vient bien de montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(nx) = nf(x)$.

3. Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^\star$ fixés. On calcule $f\left(q \times \dfrac{p}{q}\right)$ de deux façons différentes. En effet, on a d'un côté : $f\left(q \times \dfrac{p}{q}\right) = f(p) = f(p \times 1) = pf(1) = pa$ car $p \in \mathbb{Z}$ et en appliquant la question précédente avec $x = 1$. Mais d'un autre côté, on a aussi : $f\left(q \times \dfrac{p}{q}\right) = qf\left(\dfrac{p}{q}\right)$ en appliquant cette fois ci la question précédente avec $x = \dfrac{p}{q}$. Ainsi, on obtient l'égalité suivante : $pa = qf\left(\dfrac{p}{q}\right) \Leftrightarrow f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{p}{q}a$ ce qui est le résultat attendu.
4. On utilise alors le fait que tout réel est limite d'une suite de rationnels. Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait donc qu'il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = x$. On peut alors remarquer deux choses :

   - Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(r_n) = r_n a$ d'après la question précédente car $r_n \in \mathbb{Q}$, on a par propriété sur le produit de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n) = xa$.
   - De plus, on a aussi :
     - ⋆ $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = x$
     - ⋆ f est continue en x car elle est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier par hypothèse de départ.

     Ainsi d'après le théorème sur les suites et les fonctions, on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n) = f(x)$.

   Ainsi par unicité de la limite, on obtient que : $f(x) = ax$.
5. On a donc ainsi montrer dans l'analyse que si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ alors la fonction f est une fonction linéaire.
   Synthèse : comme toutes les fonctions linéaires, à savoir toutes les fonctions de type $f : x \mapsto ax$ sont bien continues et vérifient bien que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$, on obtient : l'ensemble des fonctions f cherchées est l'ensemble des fonctions linéaires.