Correction TD 20 - Espace vectoriel

I Sous-espaces vectoriels

Correction 1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2x - y = 0\right\}$

   ⋆ Première méthode : par la définition des sev. On a :
   - $A \subset \mathbb{R}^2$ par définition.
   - $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ car $2 \times 0 - 0 = 0$.
   - Soient $(\{\vec{u}\}, \{\vec{v}\}) \in A^2$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\{\vec{w}\} = \lambda\{\vec{u}\} + \{\vec{v}\}$ est également dans A. On note $\{\vec{u}\} = (u_1, u_2)$ et $\{\vec{v}\} = (v_1, v_2)$. Les coordonnées de $\{\vec{w}\}$ sont alors $\{\vec{w}\} = (\lambda u_1 + v_1, \lambda u_2 + v_2)$. On a
   $$2(\lambda u_1 + v_1) - (\lambda u_2 + v_2) = \lambda(2u_1 - u_2) + 2v_1 - v_2 = 0,$$
   car on a $\{\vec{u}\} \in A$, donc $2u_1 - u_2 = 0$, et $\{\vec{v}\} \in A$, donc $2v_1 - v_2 = 0$. On en déduit que $\{\vec{w}\} \in A$, donc A est stable par combinaisons linéaires.

   On a donc bien montré que $\boxed{A \text{ est un sev de } \mathbb{R}^2}$.

   ⋆ Deuxième méthode : en mettant A sous forme vectorielle. On résout l'équation définissant A :
   $$2x - y = 0 \Leftrightarrow y = 2x.$$
   On a donc :
   $$A = \{(x, 2x), x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 2), x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, 2)).$$
   En particulier, $\boxed{A \text{ est un sev de } \mathbb{R}^2}$.

2. $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x - 3y + 1 = 0\right\}$
   On a $(0, 0) \notin B$. En effet, $0 - 3 \times 0 + 1 = 1 \neq 0$. Donc $\boxed{B \text{ n'est pas un sev de } \mathbb{R}^2}$.

3. $C = \left\{(x + 2y, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$
   On met C sous forme vectorielle :
   $$\{\vec{u}\}(u_1, u_2) \in C \Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (u_1, u_2) = (x + 2y, y) = x(1, 0) + y(2, 1).$$
   On a donc $C = \mathrm{Vect}((1, 0), (2, 1))$, et en particulier, $\boxed{C \text{ est un sev de } \mathbb{R}^2}$.

4. $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1\right\}$
   On a bien $(0, 0) \in D$, car $0^2 + 0^2 = 0 \leq 1$. Montrons cependant que D n'est pas un sev. Soit $\{\vec{u}\} = (1, 0)$. On a bien $\{\vec{u}\} \in D$ car $1^2 + 0^2 = 1 \leq 1$. Mais par contre, $\{\vec{v}\} = 2\{\vec{u}\}$ n'est pas dans D : en effet, $2^2 + 0^2 = 4 > 1$. Donc D n'est pas stable par combinaisons linéaires, et $\boxed{D \text{ n'est pas un sev de } \mathbb{R}^2}$.

Correction 2. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

1. $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x - 3y + z = 0\right\}$
   Là encore, on peut utiliser deux méthodes, soit la définition, soit mettre A sous forme vectorielle. Je ne donne que la deuxième. On résout l'équation de A :
   $$2x - 3y + z = 0 \Leftrightarrow z = 3y - x,$$
   donc on a
   $$A = \{(x, y, 3y - x), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, 3), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$
   On a donc $A = \mathrm{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, 3))$, et en particulier, $\boxed{A \text{ est un sev de } \mathbb{R}^3}$.

2. $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x - 3y + z = 1\right\}$
   On a $(0,0,0) \notin B$. En effet, $2 \times 0 - 3 \times 0 + 0 = 0 \neq 1$. Donc $\boxed{B \text{ n'est pas un sev de } \mathbb{R}^3}$.
3. $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x - 5y = 2y + z = 0\right\}$
   On résout l'équation de C :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & - & 5y & & & = & 0 \\ & & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 2x & = & 5y \\ z & = & -2y \end{array}\right.,$$

   donc on a

$$C = \left\{\left(\frac{5}{2}y, y, -2y\right), y \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\frac{y}{2}(5,2,-4), y \in \mathbb{R}\right\}.$$

   On a donc $C = \mathrm{Vect}((5,2,-4))$, et en particulier, $\boxed{C \text{ est un sev de } \mathbb{R}^3}$.
4. $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad y = x^3\right\}$
   On a bien $(0,0,0) \in D$, car $0 = 0^3$. Montrons cependant que D n'est pas un sev. Soit $\vec{\{u\}} = (1,1,0)$. On a bien $\vec{\{u\}} \in D$ car $1 = 1^3$. Mais par contre, $\vec{\{v\}} = 2\vec{\{u\}}$ n'est pas dans D : en effet, $2 \neq 2^3$. Donc D n'est pas stable par combinaisons linéaires, et $\boxed{D \text{ n'est pas un sev de } \mathbb{R}^3}$.
5. $E = \{(2z, -z, z), \quad z \in \mathbb{R}\}$
   On met E sous forme vectorielle :

$$\vec{\{u\}}(u_1, u_2, u_3) \in E \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{R} : (u_1, u_2, u_3) = (2z, -z, z) = z(2,-1,1).$$

   On a donc $E = \mathrm{Vect}((2,-1,1))$, et en particulier, $\boxed{E \text{ est un sev de } \mathbb{R}^3}$.

Correction 3. $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad x + 2y - t = 0 \quad \text{et} \quad x - 3y + 9z = 1\right\}$.
On a $(0,0,0,0) \notin F$ car $0 - 3 \times 0 + 9 \times 0 = 0 \neq 1$. Donc $\boxed{F \text{ n'est pas un sev de } \mathbb{R}^4}$.

II Sous-espaces vectoriels engendrés. Familles génératrices

Correction 4. La méthode est toujours de mettre F sous forme vectorielle.

1. F est sous forme cartésienne : on résout le système d'équations cartésiennes pour obtenir la forme paramétrique de F, puis sa forme vectorielle.
   On a $(x,y,z,t) \in F$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x - y + z & = & 0 \\ y - 2t & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & y - z \\ y & = & 2t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 2t - z \\ y & = & 2t \end{array}\right.$$

   On a donc $F = \left\{(2t - z, 2t, z, t), (z,t) \in \mathbb{R}^2\right\}$, et finalement : $\boxed{F = \mathrm{Vect}((-1,0,1,0),(2,2,0,1))}$.
2. On trouve de même : $\boxed{F = \mathrm{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1))}$.
3. On trouve de même : $\boxed{F = \mathrm{Vect}((1,0,-a),(0,1,-b))}$.

Correction 5. Donner l'écriture cartésienne des espaces vectoriels suivants.

1. Par définition, $(x,y,z)\in E$ ssi il existe alors λ,μ tels que $(x,y,z)=\lambda u+\mu v$, soit en passant aux coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda+2\mu&=&x\\2\lambda+\mu&=&y\\2\lambda+3\mu&=&z\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}\lambda+2\mu&=&x\\-3\mu&=&y-2x\\-\mu&=&z-2x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}\lambda+2\mu&=&x\\-3\mu&=&y-2x\\0&=&3z-y-4x\end{array}\right.$$

   Ce système est compatible ssi la dernière équation est vérifiée, donc $\boxed{E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, 3z-y-4x=0\}}$.

2. On trouve de même : $\boxed{E=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, y-x-3t=0 \text{ et } x+2z-3t=0\}}$.
3. On trouve de même : $\boxed{E=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, x-4y-5z+2t=0\}}$.

Correction 6. Soit $E=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad x-3y+2z=0\big\}$ et $u=(1,3,4)$ et $v=(3,-1,-3)$. On traite les deux questions en même temps en montrant directement que $E=\mathrm{Vect}(u,v)$. On a

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in\mathrm{Vect}(u,v)&\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,(x,y,z)=\lambda u+\mu v\\&\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\left\{\begin{array}{rcl}\lambda+3\mu&=&x\\3\lambda-\mu&=&y\\4\lambda-3\mu&=&z\end{array}\right.\end{aligned}$$

On résout ce système :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda+3\mu&=&x\\3\lambda-\mu&=&y\\4\lambda-3\mu&=&z\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll}\lambda+3\mu&=&x&\\-10\mu&=&y-3x&(\mathbf{L_2-3L_1})\\-15\mu&=&z-4x&(\mathbf{L_3-4L_1})\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll}\lambda+3\mu&=&x&\\-10\mu&=&y-4x&\\0&=&10z+5x-15y&(\mathbf{10L_3-15L_1})\end{array}\right.$$

Ce système est compatible ssi la dernière équation est vérifiée, c'est-à dire ssi $2z-3y+x=0$. On remarque que c'est exactement l'équation de E, donc on a bien montré que $\boxed{E=\mathrm{Vect}(u,v)}$ et donc que $\boxed{E \text{ est un sev}}$. **Correction**

7. Dans $\mathbb{K}^3$, on considère $u=(2,-4,7)$ et $v=(-1,2,-3)$. Peut-on déterminer a de sorte que $w\in\mathrm{Vect}(u,v)$ dans chacun des 3 cas suivants :

1. On a $w=(-1,a,3)\in\mathrm{Vect}(u,v)$ ssi il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tels que $w=\lambda u+v$. En passant au coordonnées, on doit donc résoudre le système suivant d'inconnues λ et μ :

$$\left\{\begin{array}{rcl}-1&=&2\lambda-\mu\\a&=&-4\lambda+2\mu\\3&=&7\lambda-3\mu\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}2\lambda-\mu&=&-1\\-4\lambda+2\mu&=&a\\7\lambda-3\mu&=&3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll}2\lambda-\mu&=&-1&\\0&=&a-2&(\mathbf{L_2+2L_1})\\\lambda&=&6&(\mathbf{L_3-3L_1})\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}\mu&=&13\\\lambda&=&6\\a&=&2\end{array}\right.$$

   Ce système est compatible si et seulement si la dernière équation, qui ne comporte plus d'inconnue, est vérifiée. Donc $\boxed{w\in\mathrm{Vect}(u,v)\text{ si et seulement si } a=2}$.

2. On a $w=(-1,2,a)\in\mathrm{Vect}(u,v)$ ssi il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tels que $w=\lambda u+v$. En passant au coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{rcl}2\lambda-\mu&=&-1\\-4\lambda+2\mu&=&2\\7\lambda-3\mu&=&a\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll}2\lambda-\mu&=&-1&\\0&=&0&(\mathbf{L_2+2L_1})\\\lambda&=&a+3&(\mathbf{L_3-3L_1})\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}\mu&=&2a+4\\\lambda&=&a+3\end{array}\right.$$

   Ce système est compatible quelle que soit la valeur de a. Donc $\boxed{w\in\mathrm{Vect}(u,v)\text{ pour tout } a\in\mathbb{R}}$.

3. On a $w=(-1,-1,a)\in \text{Vect}(u,v)$ ssi il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tels que $w=\lambda u+v$. En passant au coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\lambda-\mu &=& -1\\ -4\lambda+2\mu &=& -1\\ 7\lambda-3\mu &=& a\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 2\lambda-\mu &=& -1 & \\ 0 &=& -3 & (\mathbf{L_2+2L_1})\\ \lambda &=& a+3 & (\mathbf{L_3-3L_1})\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \mu &=& 2a+4\\ \lambda &=& a+3\\ 0 &=& -3\end{array}\right.$$

Ce système n'est pas compatible, et ce quelle que soit la valeur de a. Donc $\boxed{\text{pour tout } a\in\mathbb{R}, \text{ on a } w\notin \text{Vect}(u,v)}$.

Correction 8.

1. **Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u=(1,3,-1)$, $v=(1,-3,2)$, $u'=(1,9,-4)$ et $v'=(-2,-18,8)$. Comparer pour l'inclusion les sev suivants : $F=\text{Vect}(u,v)$ et $G=\text{Vect}(u',v')$.**
On commence par remarquer que $v'=-2u'$, donc $\text{Vect}(u',v')=\text{Vect}(u')$. On en déduit que $\dim G=1$.
De plus, les vecteurs u et v sont non colinéaires, donc (u,v) est une famille libre et génératrice de F, et donc $\dim F=2$.
Comme $\dim F>\dim G$, on ne peut pas avoir $F\subset G$. On cherche par contre à montrer que $G\subset F$. Pour cela, on considère un élément $w\in G$, et on veut montrer que $w\in F$. Comme $G=\text{Vect}(u',v')=\text{Vect}(u')$, il suffit de montrer que $u'\in F$. Pour cela, on cherche $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda+\mu &=& 1\\ 3\lambda-3\mu &=& 9\\ -\lambda+2\mu &=& -4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} \lambda+\mu &=& 1 & \\ -6\mu &=& 6 & (\mathbf{L_2-3L_1})\\ 3\mu &=& -3 & (\mathbf{L_3+L_1})\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} \lambda+\mu &=& 1 & \\ -6\mu &=& 6 & \\ 0 &=& 0 & (\mathbf{2L_3+L_2})\end{array}\right.$$

Ce système est compatible, donc on a bien $u'\in\text{Vect}(u,v)$, et on a bien $\boxed{G\subset F}$.

2. **Recommencer pour $u=(1,2,1)$, $v=(1,-3,2)$, $u'=(0,5,-1)$ et $v'=(3,1,4)$.**
On met F et G sous forme cartésienne. On obtient la même équation cartésienne $F=G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, 7x-y-5z=0\}$. On a donc $\boxed{F=G}$.

Correction 9.

Soit $E=\mathbb{R}^3$. Déterminer l'ensemble des valeurs de $m\in\mathbb{R}$ telles que $u=(m,1,m)$ appartient à $\text{Vect}(v,w)$ avec $v=(1,1,1)$ et $w=(1,m,-1)$.
On a $u\in\text{Vect}(v,w)$ ssi il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tels que $u=\lambda v+\mu w$, ie :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda+\mu &=& m\\ \lambda+m\mu &=& 1\\ \lambda-\mu &=& m\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} \lambda+\mu &=& m & \\ (m-1)\mu &=& 1-m & (\mathbf{L_2-L_1})\\ -2\mu &=& 0 & (\mathbf{L_3-L_1})\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda &=& m\\ 0 &=& 1-m\\ \mu &=& 0\end{array}\right.$$

Ce système est compatible si et seulement si $m=1$, donc $\boxed{u\in\text{Vect}(v,w) \text{ ssi } m=1}$.

Correction 10.

1. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On peut écrire u comme combinaison linéaire de u_1,u_2,u_3 ssi il existe $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ tels que $u=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3$, soit en passant aux coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+7\lambda_2+3\lambda_3 &=& x\\ -\lambda_1+10\lambda_2-4\lambda_3 &=& y\\ -2\lambda_1+3\lambda_2-7\lambda_3 &=& z\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+7\lambda_2+3\lambda_3 &=& x\\ 17\lambda_2-\lambda_3 &=& x+y\\ 17\lambda_2-\lambda_3 &=& 2x+z\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+7\lambda_2+3\lambda_3 &=& x\\ 17\lambda_2-\lambda_3 &=& x+y\\ 0 &=& x-y+z\end{array}\right.$$

Or la dernière équation n'est pas vérifiée pour toutes les valeurs de (x,y,z), donc $\boxed{(u_1,u_2,u_3) \text{ n'engendre pas } \mathbb{R}^3}$.
Remarque : on vient de montrer que $\text{Vect}(u_1,u_2,u_3)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-y+z=0\}$, c'est donc un plan de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On peut écrire u comme combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 ssi il existe des λ_i tels que $u = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i u_i$. En passant aux coordonnées, on obtient cette fois un système compatible quelles que soient les valeurs de (x, y, z, t). Donc $\boxed{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \text{ engendre } \mathbb{R}^4}$.

Correction 11. On met F et G sous forme vectorielle. On obtient : $F = \mathrm{Vect}((-1, -3, 0, 1), (0, 0, 1, 0))$, donc une famille génératrice de F est $\boxed{((-1, -3, 0, 1), (0, 0, 1, 0))}$, et $G = \mathrm{Vect}((1, -1, 1, 0), (1, 0, 0, 1))$, donc une famille génératrice de G est $\boxed{((1, -1, 1, 0), (1, 0, 0, 1))}$.
On a $F \cap G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - y - 2t = 0 \quad \text{et} \quad x + t = 0 \quad x - z + t = 0 \quad \text{et} \quad y + z = 0\}$. On met $F \cap G$ sous forme vectorielle, et on obtient que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. Une famille génératrice est donc $\boxed{(0, 0, 0, 0)}$.

III Familles libres

Correction 12.

1. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0_{\mathbb{R}^3}$, soit en passant aux coordonnées :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_2 + 6\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_2 + 6\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, donc $\boxed{\text{la famille est libre}}$.

2. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0_{\mathbb{R}^3}$, soit en passant aux coordonnées :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda\lambda_3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \\ -4\lambda_2 - (\lambda+6)\lambda_3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \\ -(\lambda-2)\lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

On doit alors faire deux cas :
Cas 1 : si $\lambda \neq 2$. Dans ce cas, la dernière équation donne $\lambda_3 = 0$, puis en remontant $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, donc $\boxed{\text{la famille est libre}}$.

Cas 2 : si $\lambda = 2$. Dans ce cas, la dernière équation donne $0 = 0$, et le système équivaut à :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 &= \lambda_3 \\ \lambda_2 &= -2\lambda_3 \end{cases}$$

La famille est donc liée. En prenant comme valeur particulère $\lambda_3 = 1$, on obtient $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_1 = 1$, soit la relation : $\boxed{u - 2v + w = 0}$.

3. De même, on montre que $\boxed{\text{la famille est libre}}$.

4. On a 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 donc la famille est liée. De plus, avec la méthode du dessus, on trouve comme relation de liaison $\boxed{w = u + v + w}$.

Correction 13. Soient λ_i tels que $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i u_i = 0_{\mathbb{R}^4}$, c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_1+m\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_2+m\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_3+m\lambda_4 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} (-m^3+m^2-m+1)\lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_1 & = & -m^3\lambda_4 \\ \lambda_2 & = & m^2\lambda_4 \\ \lambda_3 & = & -m\lambda_4 \end{array}\right.$$

On résout $-m^3+m^2-m+1=0$. Une solution particulière est $m=1$. On factorise par $(m-1)$, et on obtient $-m^3+m^2-m+1=(m-1)(m^2-1)=(m-1)^2(m+1)$. On doit donc faire plusieurs cas :

- Cas 1 : si $m=1$. Alors la première équation équivaut à $0=0$, et on a donc des solutions non nulles au système : $\boxed{\text{la famille est liée}}$. De plus, en prenant $\lambda_4=1$, on obtient $\lambda_1=-1, \lambda_2=1, \lambda_3=-1$, donc la relation de liaison est $\boxed{-u_1+u_2-u_3+u_4=0_{\mathbb{R}^4}}$.

- Cas 2 : si $m=-1$: à nouveau $\boxed{\text{la famille est liée}}$. De plus, en prenant $\lambda_4=1$, on obtient $\lambda_1=1, \lambda_2=1, \lambda_3=1$, donc la relation de liaison est $\boxed{u_1+u_2+u_3+u_4=0_{\mathbb{R}^4}}$.

- Cas 3 : si $m\notin\{-1,1\}$: alors le système a pour seule solution $(0,0,0,0)$, donc $\boxed{\text{la famille est libre}}$.

Correction 14.

1. Les vecteurs $(6,4,0)$ et $(1,6,2)$ sont non colinéaires, car la troisième coordonnée du premier vecteur est nulle, et celle du deuxième vaut 2, donc $\boxed{\text{la famille est libre}}$.
2. On pose λ_1,λ_2 tels que $\lambda_1(a,a-6,4)+\lambda_2(1,-a,2)=0_{\mathbb{R}^3}$, et on résout le système associé. On trouve que $\boxed{\text{la famille est libre ssi } a\neq 2}$.

Correction 15. On étudie la liberté de la famille : soient $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1 u+\lambda_2 v+\lambda_3 w=0_{\mathbb{R}^3}$. On pose le système associé et on l'échelonne. On trouve que le système admet une seule solution $(0,0,0)$ si et seulement si $m\neq 1$. Ainsi, la famille est liée ssi $m=1$. On a alors $-u+v-2w=0_{\mathbb{R}^3}$.

IV Base, Dimension

Correction 16.

1. On met F sous forme vectorielle, et on obtient : $F=\mathrm{Vect}((2,5,1))$. La famille $((2,5,1))$ est libre car elle ne comporte qu'un seul vecteur non nul, donc c'est une base de F, et $\dim F=1$.
2. On met F sous forme vectorielle, et on obtient : $F=\mathrm{Vect}((1,1,0),(-4,0,1))$. On montre que la famille $((1,1,0),(-4,0,1))$ est libre, donc c'est une base de F, et $\dim F=2$.
3. On a $F=\mathrm{Vect}((1,2,-2),(-1,3,-1),(1,7,-5))$, mais la famille n'est pas libre. On en extrait une famille libre : $((1,2,-2),(-1,3,-1))$, qui est alors une base, et donc $\dim F=2$.
4. On met sous forme vectorielle, et pour cela on résout :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z+t & = & 0 \\ x-y+z+t & = & 0 \\ x+2y-at & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z+t & = & 0 \\ 3y-z-3t & = & 0 \\ (2-a)t & = & 0 \end{array}\right.$$

On fait deux cas :
Cas 1 : si $a = 2$, alors on a $F = \text{Vect}((-2,1,3,0),(-4,0,-3,1))$, cette famille est bien libre et $\dim F = 2$.

Cas 2 : si $a \neq 2$, alors on a $t = 0$, $F = \text{Vect}((-2,1,3,0))$, cette famille est bien libre et $\dim F = 1$.

Correction 17.

1. La famille n'est pas génératrice car elle a moins de 3 éléments. Ce n'est donc pas une base. On montre toujours avec la même méthode que $\mathcal{F}_1$ est libre. Pour la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$, il faut ajouter un vecteur non lié. On prend par exemple $(1,0,0)$, et on regarde si la famille est libre si elle ne l'est pas, on essaye avec un autre vecteur). Soient $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1(2,4,3) + \lambda_2(1,5,7) + \lambda_3(1,0,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$, et on cherche des valeurs de x, y, z telles que la seule solution soit $(0,0,0)$. On doit résoudre :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ 4\lambda_1 & + & 5\lambda_2 & & & = & 0 \\ 3\lambda_1 & + & 7\lambda_2 & & & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccc} 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 & \\ 4\lambda_1 & + & 5\lambda_2 & & & = & 0 & \\ & & 13\lambda_2 & & & = & 0 & \mathbf{4L_3 - 3L_2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

La famille $((2,4,3),(1,5,7),(1,0,0))$ est alors libre et de taille 3. Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

2. On remarque que la famille ne peut pas être libre car elle comporte plus de 3 éléments. Ce n'est donc pas une base. Soient à nouveau $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i u_i = 0$, soit

$$\left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 & = & 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 + 5\lambda_4 & = & 0 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 5\lambda_3 + 6\lambda_4 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & \lambda_3 + 2\lambda_4 \\ \lambda_2 & = & -2\lambda_3 - 3\lambda_4 \end{array}\right.$$

On a ici deux degrés de liberté, il faut donc enlever 2 vecteurs pour obtenir une famille libre. On prend des valeurs particulières, tout d'abord $\lambda_3 = 1$ et $\lambda_4 = 0$, qui donnent $u_1 - 2u_2 + u_3 = 0$, donc on peut exprimer u_3 en fonction de u_1, et u_2, ce qui permet de supprimer u_3. De même, pour $\lambda_3 = 0$ et $\lambda_4 = 1$, on obtient $2u_1 - 3u_2 + u_4 = 0$, ce qui permet de supprimer u_4. On a donc $\text{Vect}\,((1,2,3),(2,3,4),(3,4,5),(4,5,6)) = \text{Vect}\,((1,2,3),(2,3,4))$, et cette famille est bien libre (pour le montrer, on pourrait reprendre le système précédent pour $\lambda_3 = 0$ et $\lambda_4 = 0$). On peut la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$ en ajoutant le vecteur $(1,0,0)$ (à détailler).

3. On montre que la famille est libre. Comme elle est de taille 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. On montre que la famille est libre. Comme elle est de taille 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Correction 18. Comme la famille est de taille 3, il suffit de montrer qu'elle est libre, toujours avec la même méthode (on pourrait aussi montrer qu'elle est génératrice, mais c'est souvent plus calculatoire). Pour obtenir ensuite les coordonnée de u, on cherche les λ_i tels que $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, soit

$$\left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \\ 7\lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 & = & -2 \\ 2\lambda_1 + 9\lambda_2 + 6\lambda_3 & = & -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & 19 \\ \lambda_2 & = & -11 \\ \lambda_3 & = & 7 \end{array}\right.$$

On en déduit que $M_{(v_1,v_2,v_3)}(u) = \begin{pmatrix} 19 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}$. **Correction 19.**

1. Comme (u, v) est par définition une famille génératrice de F, il suffit de montrer que c'est aussi une famille libre, et ce avec la méthode habituelle.
2. On répond aux deux questions en même temps. Cherchons λ, μ tels que $(3, 3, 4) = \lambda u + \mu v$, ie :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda + 2\mu & = & 3 \\ -\lambda + \mu & = & 3 \\ 2\lambda + 3\mu & = & 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda + 2\mu & = & 3 \\ 3\mu & = & 6 \\ -\mu & = & -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & -1 \\ \mu & = & 2 \end{array}\right.$$

Donc $\boxed{w = (3, 3, 4) \in E}$ et sa matrice de coordonnées est donnée par $\boxed{M_{(u,v)}(w) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$.

Correction 20.À nouveau, comme la famille comporte 3 éléments, il suffit de montrer qu'elle est libre, ce qu'on fait avec la méthode habituelle.
On cherche ensuite $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, ie :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 1 \\ \lambda_1 + \lambda_3 & = & 2 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 1 \\ -\lambda_2 & = & 1 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 & = & 2 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & -2 \\ \lambda_2 & = & -1 \\ \lambda_3 & = & 4 \end{array}\right.$$

donc la matrice des coordonnées de w est donnée par $\boxed{M_{(v_1,v_2,v_3)}(w) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}}$. **Correction 21.**On met F et G

sous forme vectorielle : $\boxed{F = \mathrm{Vect}((1, -1, 0, 0, -1), (0, -1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1))}$ et $G = \mathrm{Vect}((-1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0), ($
F et G sont donc bien des sev de $\mathbb{R}^5$. On montre ensuite que les familles génératrices sont bien libres, et sont donc des bases. On en déduit que $\boxed{\dim F = 3}$ et $\boxed{\dim G = 4}$.
On a de plus $F \cap G = \big\{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5, \quad x + y + z = 0 \text{ et } x + u - t = 0 \text{ et } x + y - z + t = 0\big\}$. On met donc $F \cap G$ sous forme vectorielle : $\boxed{F \cap G = \mathrm{Vect}((-4, -3, 1, 2, 0), (1, 1, 0, 0, 1))}$. On vérifie que c'est bien aussi une famille libre, et donc une base. On en déduit que $\boxed{\dim F \cap G = 2}$. **Correction 22.On désigne par E l'espace**

vectoriel $\mathbb{C}^3$. On considère les parties suivantes de E :

$$F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3, \quad x + iy - z = 0\big\} \qquad G = \big\{(a + ib, a - ib, a + b),\ (a, b) \in \mathbb{C}^2\big\}.$$

1. On met F et G sous forme vectorielle : $\boxed{F = \mathrm{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, i))}$ et $\boxed{G = \mathrm{Vect}((1, 1, 1), (i, -i, 1))}$. On montre que ces familles sont aussi libres, et sont donc des bases respectives de F et G.
2. On a $(x, y, z) \in G$ si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que $(x, y, z) = \lambda(1, 1, 1) + \mu(i, -i, 1)$, soit

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda + i\mu & = & x \\ \lambda - i\mu & = & y \\ \lambda + \mu & = & z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda + i\mu & = & x \\ -2i\mu & = & y - x \\ (1 - i)\mu & = & z - x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda + i\mu & = & x \\ -2i\mu & = & y - x \\ 0 & = & (1 - i)y - (1 + i)x + 2iz \end{array}\right.$$

Ce système est compatible ssi la dernière équation est vérifiée. On a donc : $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3,\ (1 - i)y - (1 + i)x +$

3. On a donc $\boxed{H = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3, \quad x + iy - z = 0 \ \text{ et } \ (1 - i)y - (1 + i)x + 2iz\big\}}$. On met ensuite H sous forme vectorielle, et on obtient : $H = \mathrm{Vect}((-i, 1, 0))$. Cette famille ne contient qu'un seul vecteur non nul, c'est donc une base de H.

4. On choisit $u=(1,0,1)\in F$, $v=(1,1,1)\in G$, et au hasard, $w=(1,0,0)$. On montre ensuite que la famille (u,v,w) est bien libre (si par malchance, la famille est liée, on choisit un autre vecteur), et que donc (u,v,w) est une base de $\mathbb{C}^3$.

Correction 23. Soient λ_i tels que $\sum_i \lambda_i v_i = 0_{R^5}$, soit :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda_1-\lambda_2-\lambda_4&=&0\\-2\lambda_2+\lambda_3-5\lambda_4&=&0\\\lambda_1+\lambda_4&=&0\\\lambda_2+2\lambda_4&=&0\\\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_3+5\lambda_4&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}\lambda_1&=&-\lambda_4\\\lambda_2&=&-2\lambda_4\\\lambda_3&=&\lambda_4\end{array}\right.$$

On en déduit que la famille est liée. En prenant $\lambda_4=1$, on voit que $-v1-2v_2+v3+v_4=0$, donc on peut exprimer v_4 en fonction des autres, et donc le supprimer. On montre que la famille (v_1,v_2,v_3) est alors libre (en prenant $\lambda_4=0$ dans le système précédent par exemple), et donc que c'est une base de F. On a donc $\boxed{\dim F=3}$.

V Rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice, d'un système linéaire

Correction 24.

1. $E=\mathbb{R}^4$ et $u=(1,1,0,0)$, $v=(3,-1,3,-1)$, $w=(0,1,0,1)$, $x=(-1,5,-1,5)$: il y a deux méthodes pour trouver le rang d'une famille de vecteurs, soit en calculant le rang du système linéaire associé, soit en calculant le rang de la matrice de la famille. L'avantage de la première méthode est qu'elle donne directement les relations de liaison entre les vecteurs si ceux-ci sont liés, et permet donc d'extraire une famille libre. On choisit cette méthode ici : soient λ_i tels que $\lambda_1 u+\lambda_2 v+\lambda_3 w+\lambda_4 x=0$, ie :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda_1+3\lambda_2-\lambda_4&=&0\\\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3+5\lambda_4&=&0\\3\lambda_2-\lambda_4&=&0\\-\lambda_2+\lambda_3+5\lambda_4&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}\lambda_1+3\lambda_2-\lambda_4&=&0\\-\lambda_2+\lambda_3+5\lambda_4&=&0\\3\lambda_3+14\lambda_4&=&0\end{array}\right.$$

   La famille est donc liée, et en prenant $\lambda_4=1$, on voit que l'on peut éliminer x de la famille. On obtient alors (u,v,w) famille génératrice et libre (le montrer en prenant $\lambda_4=0$ par exemple), donc une base, et donc $\boxed{\text{le rang de } \mathcal{F} \text{ est } 3}$.

2. $E=\mathbb{C}^2$ et $u=(1,i)$, $v=(i,-1)$: avec la même méthode, on obtient que $\boxed{\text{le rang est } 1}$ et une base est (u).

3. $E=\mathbb{R}^4$ et $u=(1,0,0,-1)$, $v=(2,1,0,1)$, $w=(1,-1,1,-1)$, $x=(7,2,0,1)$, $y=(-2,-3,1,0)$: avec la même méthode, on obtient que $\boxed{\text{le rang est } 4}$ et une base est (u,v,w,x).

Correction 25. On utilise ici la méthode matricielle, car on ne cherche que le rang. On applique la méthode du pivot de Gauss à la matrice :

$$\begin{pmatrix}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&1\\1&1&\lambda&1\\1&1&1&\lambda\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&\lambda\\1&\lambda&1&1\\1&1&\lambda&1\\\lambda&1&1&1\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&\lambda\\0&\lambda-1&0&1-\lambda\\0&0&\lambda-1&1-\lambda\\0&1-\lambda&0&0\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&\lambda\\0&\lambda-1&0&1-\lambda\\0&0&\lambda-1&1-\lambda\\0&0&0&\lambda-1\end{pmatrix}$$

On obtient une matrice triangulaire. On différencie deux cas :
Cas 1 : si $\lambda = 1$, alors toutes les lignes sont nulles sauf la première, donc $\boxed{\text{le rang est 1}}$.
Cas 2 : si $\lambda \neq 1$, alors toutes les lignes sont non nulles, donc $\boxed{\text{le rang est 4}}$. **Correction 26.Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants définis par**

1. $E = \text{Vect}((1,1,-2),(2,1,-3),(0,1,-1))$: en résolvant le système linéaire associé, on montre que la famille est liée et que le dernier vecteur peut être supprimé : $\boxed{((1,1,-2),(2,1,-3)) \text{ est une base de } E}$.
2. $F = \text{Vect}((4,-5,3),(2,3,-2),(4,-16,10),(8,1,-1))$: on montre cette fois que l'on peut supprimer les deux derniers vecteurs : $\boxed{((4,-5,3),(2,3,-2)) \text{ est une base de } E}$.

Correction 27. On applique la méthode du pivot de Gauss à la matrice M définie par $M = \begin{pmatrix} m & -1 & 2 \\ 2 & m-3 & 4 \\ 3 & -3 & m+5 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} m & -1 & 2 \\ 2 & m-3 & 4 \\ 3 & -3 & m+5 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & m-3 & 4 \\ m & -1 & 2 \\ 3 & -3 & m+5 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & m-3 & 4 \\ 0 & -2-m^2+3m & 4-4m \\ 0 & 3-3m & 2m-2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & m-3 & 4 \\ 0 & -(m-1)(m-2) & -4(m-1) \\ 0 & -3(m-1) & 2(m-1) \end{pmatrix}$$

On fait alors 2 cas :
Cas 1 : si $m = 1$, la matrice est échelonnée et il n'y a que la première ligne qui est non nulle, donc $\boxed{\text{le rang est 1}}$.
Cas 2 : si $m \neq 1$, on a alors :

$$M \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & m-3 & 4 \\ 0 & -3(m-1) & 2(m-1) \\ 0 & -(m-1)(m-2) & -4(m-1) \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & m-3 & 4 \\ 0 & -3(m-1) & 2(m-1) \\ 0 & 0 & -2m^2+6m-8 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & m-3 & 4 \\ 0 & -3(m-1) & 2(m-1) \\ 0 & 0 & 2(m-1)(m+4) \end{pmatrix}$$

On fait à nouveau deux cas :
Cas 2.1 : si $m = -4$, alors la matrice est échelonnée et seules les deux premières lignes sont non nulles, donc $\boxed{\text{le rang est 2}}$.
Cas 2.2 : si $m \notin \{1,-4\}$, alors la matrice est échelonnée et les 3 lignes sont non nulles, donc $\boxed{\text{le rang est 3}}$.

Correction 28. On montre que w peut s'exprimer en fonction de u, v, t, donc $F = \text{Vect}(u,v,t)$. De plus, on montre que (u,v,t) est une famille libre, donc (u,v,t) est une base de F et sa dimension est 3.

VI Bonus pour l'année prochaine

Correction 29. On admet que l'ensemble E des suites réelles est un espace vectoriel. Montrer que l'ensemble des suites bornées est un sev de E.

Soit F l'ensemble des suites bornées. On a bien $F \subset E$, et F non vide puisque la suite constante égale à 0 est dans F.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de F, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \lambda u_n + v_n$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée également. Ainsi, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.

On a donc bien montré que $\boxed{F \text{ est un sev de } E}$.

Correction 30.

1. $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P + P' + P'' = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En effet, c'est un sev de $\mathbb{R}[X]$:
   — D'une part E est non vide, le polynôme nul appartient à E.
   — D'autre part, E est stable par combinaison linéaire : Soit $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a alors
   $$\begin{aligned}(P+\lambda Q) + (P+\lambda Q)' + (P+\lambda Q)'' &= P + \lambda Q + P' + \lambda Q' + P'' + \lambda Q''\\ &= (P + P' + P'') + \lambda(Q + Q' + Q'')\\ &= 0\end{aligned}$$
   donc $P + \lambda Q \in E$.
2. $E = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid X^2 + 1 \text{ divise } P\right\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En effet, c'est un sev de $\mathbb{R}[X]$:
   — D'une part E est non vide, le polynôme nul appartient à E.
   — D'autre part, E est stable par combinaison linéaire : Soit $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a alors
   $$\begin{aligned}P + \lambda Q &= (X^2+1)\tilde{P} + \lambda(X^2+1)\tilde{Q} +\\ Q &= (X^2+1)(\tilde{P} + \lambda\tilde{Q})\end{aligned}$$
   donc $P + \lambda Q$ est divisible par $X^2 + 1$ et ainsi $P + \lambda Q \in E$.
3. $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = P(-1)\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En effet, c'est un sev de $\mathbb{R}[X]$:
   — D'une part E est non vide, le polynôme nul appartient à E.
   — D'autre part, E est stable par combinaison linéaire : Soit $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a alors
   $$\begin{aligned}(P+\lambda Q)(1) &= P(1) + \lambda Q(1)\\ &= P(-1) + \lambda Q(-1)\\ &= (P+\lambda Q)(-1)\end{aligned}$$
   et ainsi $P + \lambda Q \in E$.
4. $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = a\}$
   (discuter suivant a) Si $a \neq 0$ ce n'est pas un sev car le polynôme nul n'appartient pas à E
   Si $a = 0$ alors E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En effet, c'est un sev de $\mathbb{R}[X]$:
   — D'une part E est non vide, le polynôme nul appartient à E.
   — D'autre part, E est stable par combinaison linéaire : Soit $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a alors
   $$\begin{aligned}(P+\lambda Q)(0) &= P(0) + \lambda Q(0)\\ &= 0\end{aligned}$$
   et ainsi $P + \lambda Q \in E$.
5. $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \geqslant 2 \text{ ou } P = 0\}$ n'est pas un sev de $R[X]$ en effet E n'est pas stable par combinaison linéaire par exemple en prenant $P = X^2 + X$ et $Q = -X^2$ qui sont tous les deux de degré supérieur à 2 donc dans E, on voit que $P + Q = X$ qui est de degré 1 et n'appartient donc pas à E

6. $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P' \text{ divise } P \text{ ou } P = 0\}$ n'est pas un sev de $R[X]$ en effet E n'est pas stable par combinaison linéaire par exemple en prenant $P = X + 1$ et $Q = X^2$ qui sont bien des éléments de E (en effet $P' = 1$ divise P et $Q' = 2X$ divisie Q) on a $P + Q = X^2 + X + 1$ et $(P + Q)' = 2X + 1$ qui ne divise pas $P + Q$ donc $P + Q$ n'appartient pas à E.

Correction 31.On admet que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

1. **Montrer que l'ensemble des matrices symétriques $S_3(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.**
   On a bien $S_3(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $S_3(\mathbb{R})$ est non vide puisque la matrice nulle est symétrique, donc $0_3 \in S_3(\mathbb{R})$. Soient A et B des matrices de $S_3(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que la matrice $C = \lambda A + B$ est symétrique. On a :
   $$^tC = {}^t(\lambda A + B) = \lambda\, {}^tA + {}^tB = \lambda A + B = C$$
   car A et B sont symétriques. Ainsi ${}^tC = C$ et $C \in S_3(\mathbb{R})$.
   On a donc bien montré que $\boxed{S_3(\mathbb{R}) \text{ est un sev de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.
2. **Soit $E_{i,j}$ la matrice n'ayant que des 0 sauf le coefficient (i, j) qui vaut 1. Montrer que la famille $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, E_{1,2}+E_{2,1}, E_{1,3}+E_{3,1}, E_{2,3}+E_{3,2})$ forme une base de $S_3(\mathbb{R})$. et en déduire sa dimension.**
   On doit montrer que la famille est à la fois libre et génératrice.
   - Montrons que la famille est libre : soient $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ tels que :
   $$aE_{1,1} + bE_{2,2} + cE_{3,3} + d(E_{1,2} + E_{2,1}) + e(E_{1,3} + E_{3,1}) + f(E_{2,3} + E_{3,2}) = 0_3$$
   $$\Leftrightarrow \quad a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$
   $$\Leftrightarrow \quad a = b = c = d = e = f = 0$$
   On en déduit que la famille est libre.
   - Montrons que la famille est génératrice : soit A une matrice symétrique. On a, pour tout $(i, j) \in [\![1, 3]\!]$, $a_{i,j} = a_{j,i}$. On peut alors écrire A sous la forme :
   $$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} = aE_{1,1} + bE_{2,2} + cE_{3,3} + d(E_{1,2} + E_{2,1}) + e(E_{1,3} + E_{3,1}) + f(E_{2,3} + E_{3,2}).$$
   Ainsi toute matrice symétrique peut s'écrire comme combinaison linéaire de la famille considérée. Cette famille est donc génératrice.

   On a donc montré que $\boxed{(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{1,3} + E_{3,1}, E_{2,3} + E_{3,2}) \text{ est une base de } S_3(\mathbb{R})}$. On en déduit que $\boxed{\dim(S_3(\mathbb{R})) = 6}$.
3. **Montrer que l'ensemble des matrices anti-symétriques $A_3(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.**
   On raisonne comme pour les matrices symétriques : on a bien $A_3(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $A_3(\mathbb{R})$ est non vide puisque la matrice nulle est anti-symétrique, donc $0_3 \in A_3(\mathbb{R})$. Soient A et B des matrices de $A_3(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que la matrice $C = \lambda A + B$ est anti-symétrique. On a :
   $$^tC = {}^t(\lambda A + B) = \lambda\, {}^tA + {}^tB = -\lambda A - B = -C$$
   car A et B sont anti-symétriques. Ainsi ${}^tC = -C$ et $C \in A_3(\mathbb{R})$.
   On a donc bien montré que $\boxed{A_3(\mathbb{R}) \text{ est un sev de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.
4. **Trouver une base de $A_3(\mathbb{R})$ et en déduire sa dimension.**
   On montre de la même manière que pour les matrices symétriques $\boxed{(E_{1,2} - E_{2,1}, E_{1,3} - E_{3,1}, E_{2,3} - E_{3,2}) \text{ est une bas}}$
   et on en déduit que $\boxed{\dim(A_3(\mathbb{R})) = 3}$.
5. **Que pouvez-vous conjecturer pour la dimension de $S_n(\mathbb{R})$ et de $A_n(\mathbb{R})$?**
   Pour définir une matrice symétrique, il faut choisir ses coefficients diagonaux, ainsi que les coefficients au dessus de la diagonale. Les coefficients en-dessous de la diagonale seront alors définis par la propriété $a_{i,j} =$

$a_{j,i}$. On doit donc compter combien il existe de coefficients (i, j) tels que $1 \leq i \leq j \leq n$. Pour cela, on peut calculer la somme double suivante :

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} 1 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} 1 = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On conjecture donc que $\boxed{\dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}}$.
Une autre façon de faire le calcul est de représenter le triangle des points considérés. En rassemblant deux triangles, on obtient un rectangle de taille $n \times (n+1)$. Ainsi, il y a bien $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficients à choisir.

Pour les matrices antisymétriques, les coefficients diagonaux sont nécessairement nuls. On ne peut choisir que les coefficients strictement au-dessus de la diagonale. Le même calcul que précédemment donne alors $\boxed{\dim(A_3(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}}$.

Correction 32. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\lambda_1 1 + \lambda_2 X(X-1) + \lambda_3 X^2(X+1) + \lambda_4 X(X-1)^2 = 0$$

En développant on obtient

$$\lambda_1 + \lambda_2(X^2 - X) + \lambda_3(X^3 + X^2) + \lambda_4(X^3 - 2X^2 + X) = 0$$

Soit en regroupant les monômes de même degré :

$$\lambda_1 + (-\lambda_2 + \lambda_4)X + (\lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4)X^2 + (\lambda_3 + \lambda_4)X^3 = 0$$

En identifiant on obtient $\left\{\begin{array}{cl} \lambda_1 & = 0 \\ (-\lambda_2 + \lambda_4) & = 0 \\ (\lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4) & = 0 \\ (\lambda_3 + \lambda_4) & = 0 \end{array}\right.$ On applique l'algorithme du pivot de Gauss :