

# TD 20 : Espace vectoriel

## I Sous-espaces vectoriels

**Exercice 1.** Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$  ?

1.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x - y = 0\}$
2.  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - 3y + 1 = 0\}$
3.  $C = \{(x + 2y, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
4.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$

**Exercice 2.** Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  ?

1.  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - 3y + z = 0\}$
2.  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - 3y + z = 1\}$
3.  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - 5y = 2y + z = 0\}$
4.  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y = x^3\}$
5.  $E = \{(2z, -z, z), z \in \mathbb{R}\}$

**Exercice 3.** L'ensemble  $F$  suivant est-il un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y - t = 0 \text{ et } x - 3y + 9z = 1\}.$$

## II Sous-espaces vectoriels engendrés. Familles génératrices

**Exercice 4.** Trouver une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :

1.  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y + z = 0 \text{ et } y - 2t = 0\}$
2.  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$
3.  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, ax + by + z = 0\}$

**Exercice 5.** Donner l'écriture cartésienne des espaces vectoriels suivants.

1.  $E = \text{Vect}(u, v)$  avec  $u = (1, 2, 2)$  et  $v = (2, 1, 3)$ .
2.  $E = \text{Vect}(u, v)$  avec  $u = (1, 4, 1, 1)$  et  $v = (-1, 2, 2, 1)$ .
3.  $E = \{(2a - 3b + c, a + 2b - c, -b + c, a), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$

**Exercice 6.** Soit  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 3y + 2z = 0\}$  et  $u = (1, 3, 4)$  et  $v = (3, -1, -3)$ . Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  et que  $(u, v)$  est une famille génératrice de  $E$ .

**Exercice 7.** Dans  $\mathbb{K}^3$ , on considère  $u = (2, -4, 7)$  et  $v = (-1, 2, -3)$ . Peut-on déterminer  $a$  de sorte que  $w \in \text{Vect}(u, v)$  dans chacun des 3 cas suivants :

1.  $w = (-1, a, 3)$
2.  $w = (-1, 2, a)$
3.  $w = (-1, -1, a)$

**Exercice 8.**

1. Soient les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  suivants :  $u = (1, 3, -1)$ ,  $v = (1, -3, 2)$ ,  $u' = (1, 9, -4)$  et  $v' = (-2, -18, 8)$ . Comparer pour l'inclusion les sev suivants :  $\text{Vect}(u, v)$  et  $\text{Vect}(u', v')$
2. Recommencer pour  $u = (1, 2, 1)$ ,  $v = (1, -3, 2)$ ,  $u' = (0, 5, -1)$  et  $v' = (3, 1, 4)$ .

**Exercice 9.** Soit  $E = \mathbb{R}^3$ . Déterminer l'ensemble des valeurs de  $m \in \mathbb{R}$  telles que  $u = (m, 1, m)$  appartient à  $\text{Vect}(v, w)$  avec  $v = (1, 1, 1)$  et  $w = (1, m, -1)$ .

**Exercice 10.** Dans chacun des cas suivants, dire si la famille  $(u_i)$  engendre  $E$  :

1.  $E = \mathbb{R}^3$  et  $u_1 = (1, -1, -2)$ ,  $u_2 = (7, 10, 3)$  et  $u_3 = (3, -4, -7)$
2.  $E = \mathbb{R}^4$  et  $u_1 = (0, 0, 0, 1)$ ,  $u_2 = (0, 0, 1, 1)$  et  $u_3 = (0, 1, 1, 1)$ ,  $u_4 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $u_5 = (1, 1, 1, 0)$

**Exercice 11.** Trouver une famille génératrice des deux sous-espaces vectoriels suivants

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - y - 2t = 0 \quad \text{et} \quad x + t = 0\}$$
$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - z + t = 0 \quad \text{et} \quad y + z = 0\}.$$

Trouver une famille génératrice de  $F \cap G$ .

### III Familles libres

**Exercice 12.** Les familles suivantes de  $\mathbb{R}^3$  sont-elles libres ou liées ? Si elle est liée, exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des autres.

1.  $u = (1, -1, 0)$ ,  $v = (2, 1, -1)$  et  $w = (1, 5, -1)$
2.  $u = (1, 1, 2)$ ,  $v = (2, 1, 0)$  et  $w = (3, 1, \lambda)$   $\lambda$  paramètre réel.
3.  $u = (1, 0, -2)$ ,  $v = (2, 3, 1)$  et  $w = (4, -2, 1)$
4.  $u = (1, 1, -1)$ ,  $v = (1, -1, 1)$ ,  $w = (-1, 1, 1)$  et  $t = (1, 1, 1)$

**Exercice 13.** Pour quelles valeurs du réel  $m$  la famille  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  est une famille libre dans  $\mathbb{R}^4$  ?

$$u_1 = (1, 1, 0, 0) \quad u_2 = (1, m, 1, 0) \quad u_3 = (1, 0, m, 1) \quad u_4 = (1, 0, 0, m)$$

**Exercice 14.**

1. La famille  $((6, 4, 0), (1, 6, 2))$  est-elle libre ?
2. Pour quelles valeurs de  $a \in \mathbb{R}$ , la famille  $((a, a - 6, 4), (1, -a, 2))$  est-elle libre ?

**Exercice 15.** Déterminer  $m \in \mathbb{R}$  de sorte que la famille de vecteurs  $(u, v, w)$  de  $\mathbb{R}^4$  soit liée avec

$$u = (3, 1, -4, 6) \quad v = (1, 1, 4, 4) \quad w = (1, 0, -4, m).$$

Quelle est la relation de liaison ?

### IV Base, Dimension

**Exercice 16.** Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Donner une base de  $F$  et sa dimension.

1.  $E = \mathbb{R}^3$  et  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - y + 3z = 0 \quad \text{et} \quad 2x - y + z = 0\}$
2.  $E = \mathbb{R}^3$  et  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - y + 4z = 0\}$
3.  $E = \mathbb{R}^3$  et  $F = \{(x + 2y - 2z, -x + 3y - z, x + 7y - 5z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$
4.  $E = \mathbb{R}^4$  et  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad 2xy + z - t = 0 \quad \text{et} \quad x - y + z + t = 0 \quad \text{et} \quad x + 2y - at = 0\}$  avec  $a$  un paramètre réel.

**Exercice 17.** Les familles suivantes sont-elles libres ? Si oui, on les complètera en une base de  $\mathbb{R}^3$  et si non, on donnera la relation de liaison. Sont-elles génératrices de  $\mathbb{R}^3$  ? Si oui, on en extraira une base de  $\mathbb{R}^3$ , si non, on donnera un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  qui ne s'exprime pas en fonction des vecteurs de la famille.

1.  $\mathcal{F}_1 = ((2, 4, 3), (1, 5, 7))$
2.  $\mathcal{F}_2 = ((1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6))$
3.  $\mathcal{F}_3 = ((9, 3, -7), (1, 8, 8), (5, -5, 1))$
4.  $\mathcal{F}_4 = ((0, 1, 2), (1, 2, 0), (2, 0, 1))$

**Exercice 18.** Soit la famille  $(v_1, v_2, v_3)$  avec  $v_1 = (1, 7, 2)$ ,  $v_2 = (3, 5, 9)$  et  $v_3 = (2, 4, 6)$ . Montrer que  $(v_1, v_2, v_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Quelle est la matrice des coordonnées de  $u = (0, -2, -1)$  dans cette base ?

**Exercice 19.** Soit  $E$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  engendré par  $(u, v)$  avec  $u = (1, -1, 2)$  et  $v = (2, 1, 3)$ .

1. Montrer que  $(u, v)$  est une base de  $E$
2. Vérifier que le vecteur  $(3, 3, 4)$  appartient bien à  $E$  et déterminer ses coordonnées dans la base  $(u, v)$ .

**Exercice 20.** On définit les vecteurs  $v_1 = (1, 1, -1)$ ,  $v_2 = (1, 0, 1)$  et  $v_3 = (1, 1, 0)$ . Montrer que ces vecteurs forment une base de  $\mathbb{R}^3$ . Exprimer le vecteur  $w = (1, 2, 1)$  dans cette base.

**Exercice 21.** On considère les sous-ensembles de  $\mathbb{R}^5$  suivants :

$$F = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5, \quad x + y + z = 0 \text{ et } x + u - t = 0\} \quad G = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5, \quad x + y - z + t = 0\}.$$

Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sev de  $\mathbb{R}^5$ , en donner une base et la dimension. Etudier  $F \cap G$ .

**Exercice 22.** On désigne par  $E$  l'espace vectoriel  $\mathbb{C}^3$ . On considère les parties suivantes de  $E$  :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3, \quad x + iy - z = 0\} \quad G = \{(a + ib, a - ib, a + b), (a, b) \in \mathbb{C}^2\}.$$

1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sev de  $E$ . Donner une base pour chacun de ces sev.
2. Donner une équation cartésienne de  $G$ .
3. Donner un système d'équations cartésiennes et une base pour  $H = F \cap G$ .
4. Donner une base de  $E$  composé d'un vecteur de  $F$ , d'un vecteur de  $G$  et d'un vecteur quelconque.

**Exercice 23.** Donner la dimension de  $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$  avec  $v_1 = (1, 0, 1, 0, 1)$ ,  $v_2 = (-1, -2, 0, 1, 1)$ ,  $v_3 = (0, 1, 0, 0, -2)$  et  $v_4 = (-1, -5, 1, 2, 5)$ .

## V Rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice, d'un système linéaire

**Exercice 24.** Pour chaque famille de vecteurs, donner le rang et une base du sev engendré :

1.  $E = \mathbb{R}^4$  et  $u = (1, 1, 0, 0)$ ,  $v = (3, -1, 3, -1)$ ,  $w = (0, 1, 0, 1)$ ,  $x = (-1, 5, -1, 5)$
2.  $E = \mathbb{C}^2$  et  $u = (1, i)$ ,  $v = (i, -1)$
3.  $E = \mathbb{R}^4$  et  $u = (1, 0, 0, -1)$ ,  $v = (2, 1, 0, 1)$ ,  $w = (1, -1, 1, -1)$ ,  $x = (7, 2, 0, 1)$ ,  $y = (-2, -3, 1, 0)$ .

**Exercice 25.** Déterminer le rang de la famille  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  avec  $u_1 = (\lambda, 1, 1, 1)$ ,  $u_2 = (1, \lambda, 1, 1)$ ,  $u_3 = (1, 1, \lambda, 1)$  et  $u_4 = (1, 1, 1, \lambda)$ . Discuter selon les valeurs de  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 26.** Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants définis par

1.  $E = \text{Vect}((1, 1, -2), (2, 1, -3), (0, 1, -1))$
2.  $F = \text{Vect}((4, -5, 3), (2, 3, -2), (4, -16, 10), (8, 1, -1))$

**Exercice 27.** Soit  $m \in \mathbb{R}$ . Donner le rang de la famille  $((m, 2, 3), (-1, m - 3, -3), (2, 4, m + 5))$ .

**Exercice 28.** On considère les vecteurs  $u = (1, 1, 3, 2)$ ,  $v = (3, 2, 5, 5)$ ,  $w = (2, -1, -6, 1)$  et  $t = (5, 1, -1, 7)$ . Donner la dimension de  $F = \text{Vect}(u, v, w, t)$  et extraire de la famille  $(u, v, w, t)$  une base de  $F$ .

## VI Bonus pour l'année prochaine

**Exercice 29.** On admet que l'ensemble  $E$  des suites réelles est un espace vectoriel. Montrer que l'ensemble des suites bornées est un sev de  $E$ .

**Exercice 30.** Les ensembles suivants sont-ils des des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels ?

1.  $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P + P' + P'' = 0\}$
2.  $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid X^2 + 1 \text{ divise } P\}$
3.  $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = P(-1)\}$
4.  $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = a\}$   
(discuter suivant  $a$ )
5.  $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \geq 2 \text{ ou } P = 0\}$
6.  $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P' \text{ divise } P \text{ ou } P = 0\}$

**Exercice 31.** On admet que  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  est un espace vectoriel.

1. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques  $S_3(\mathbb{R})$  est un sev de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
2. Soit  $E_{i,j}$  la matrice n'ayant que des 0 sauf le coefficient  $(i, j)$  qui vaut 1. Montrer que la famille

$$(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{1,3} + E_{3,1}, E_{2,3} + E_{3,2})$$

forme une base de  $S_3(\mathbb{R})$ . et en déduire sa dimension.

3. Montrer que l'ensemble des matrices anti-symétriques  $A_3(\mathbb{R})$  est un sev de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
4. Trouver une base de  $A_3(\mathbb{R})$  et en déduire sa dimension.
5. Que pouvez-vous conjecturer pour la dimension de  $S_n(\mathbb{R})$  et de  $A_n(\mathbb{R})$  ?

**Exercice 32.** Déterminer si la famille suivante de polynômes est libre ou liée :

$$(1, X(X-1), X^2(X+1), X(X-1)^2)$$

**Exercice 33.** On définit dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$  :  $f_1(x) = \ln(x)$ ,  $f_2(x) = x$ ,  $f_3(x) = e^x$ ,  $f_4(x) = e^{x+3}$  et  $f_5(x) = \frac{1}{x}$ .

1. La famille  $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$  est-elle libre ?
2. Soit  $F = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ , déterminer une base de  $F$ .

**Exercice 34.** On définit dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  :  $f_1(x) = x + 1$ ,  $f_2(x) = x - 1$ ,  $f_3(x) = x^2 - x$  et  $f_4(x) = x^2 + 1$ . Soit  $F = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$ , déterminer une base de  $F$ .

**Exercice 35.** Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on pose  $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$ . Montrer que  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Exercice 36.** Montrer que les ensembles suivants sont de espaces vectoriels et en déterminer une base :

1.  $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$
2.  $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1)\}$
3.  $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P''(1) = P(1)\}$
4.  $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\}$