Programme de colle : Semaine 21
Lundi 18 Mars

1 Cours

1. Probabilités
   — Univers, événements. (Seuls les univers de cardinal fini sont au programme de BCPST1). Évènements incompatibles, événements contraires, événement certain.
   — Définition d'une probabilité. Exemple : probabilité uniforme.
   — Système complet d'événements. Formule des probabilités totales.
   — Probabilité conditionnelle, Formule de Bayes, Formule des proba totales version probabilité conditionnelle. Formule des probabilité composée.
   — Indépendance de deux événements et indépendance mutuelle entre n événements.
2. Continuité
   — Définition de la continuité (+ continuité à droite et à gauche)
   — Prolongement par continuité.
   — Composition d'une suite avec une fonction continue (étude des limites possibles d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$)
   — Théorème sur la continuité :
     — TVI + théorème de la bijection
     — Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
3. Informatique
   (a) Parcours de listes.
   (b) Modélisation d'une expérience aléatoire a l'aide de de la bibliothèque `random` plus particulièrement des fonctions `randint()` et `random`

2 Exercices Types

Exercice 1. *Dans une population, 45% des individus sont vaccinés contre la fièvre jaune, 60% sont vaccinés contre la diphtérie et 30% contre les 2 maladies. Quelle est la probabilité qu'un individu choisi au hasard ne soit vacciné contre aucune de ces deux maladies ?*

Exercice 2. *On choisit 5 cartes au hasard et simultanément dans un jeu de 32 cartes. Donner les probabilités d'avoir*

1. *5 cartes de la même couleur ;*
2. *(2 as et 3 rois) ou (3 as et 2 rois) ;*
3. *(au moins un as) et (deux rois exactement).*

Exercice 3. *Une abeille va chaque jour sur l'une des deux fleurs A et B. Au jour 0, elle va à la fleur A. À chaque nouvelle journée, il y a une probabilité $p \in]0,1[$ qu'elle aille sur la même fleur que la veille. Pour tout entier n, on note A_n l'événement « l'abeille est sur la fleur A le jour n »et B_n l'événement « l'abeille est sur la fleur B le jour n ». On pose de plus $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$.*

1. *Pour tout entier n, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.*
2. *En remarquant que $a_n + b_n = 1$, déterminer les expressions explicites de a_n et b_n.*
3. *Vers quoi tendent les deux suites ? Interpréter.*

Exercice 4. *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère n sacs $S_1, \dots, S_n$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, le sac S_k contient k jetons blancs et $n+1-k$ jetons noirs. On choisit un sac avec une probabilité de choisir le sac S_k égale à αk. Après quoi on tire au hasard un jeton dans le sac choisi.*

1. *Trouver la valeur de α.*
2. *Quelle est la probabilité de tirer un jeton blanc.*
3. *Le jeton pioché est blanc. Quelle est la probabilité que ce jeton proviennent du sac S_k pour $k \in [\![1, n]\!]$ fixé ?*

Exercice 5. *Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie α. Lors d'une épidémie, on constate que parmi les malades, il y a 20% de vaccinés. De plus, on constate que sur l'ensemble des vaccinés, il y a eu un malade sur 12. Quelle est la probabilité pour un non-vacciné de tomber malade de α ?*

Exercice 6. *On contrôle séparément et de façon indépendante les trois dimensions d'un pavé. Les probabilités de rejet sont égales à 0.06 pour la longueur, 0.04 pour la largeur et 0.08 pour la hauteur. Le pavé est refusé dès qu'une de ses dimensions est rejetée. Quelle est la probabilité pour qu'un pavé soit refusé ?*

Exercice 7. *Étudier la continuité des deux fonctions suivantes :*

$$f : x \mapsto (x^2 - 1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \cos(\ln|x|)\ln(1+x).$$

Exercice 8. *Étudier la continuité des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-4x)}{2x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$
3. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^2 + 4x}{1+x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Exercice 9. *Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(0) = g(1)$ et $f(1) = g(0)$. Démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ possède au moins une solution dans $[0,1]$.*

Exercice 10. *Étude des points fixes d'une fonction.*

1. *Montrer que si $f : [0,1] \to [0,1]$ est une fonction continue sur $[0,1]$ alors f admet un point fixe dans $[0,1]$.*
2. *Montrer que si f est continue et décroissante sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$, f admet un unique point fixe dans $[0,1]$.*

Exercice 11. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,*

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 3}$$

1. *Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie en justifiant que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.*
2. *On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Donner les valeurs possibles pour ℓ.*