Programme de colle : Semaine 23
Mardi 2 Avril

1 Cours

1. Espace vectoriel – Seul l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ et ses sous-espaces vectoriels sont au programme en BCPST1
   - Définition d'un espace vectoriel et stabilité par combinaison linéaire d'un sous-espace vectoriel.
   - Famille de vecteurs, Espace vectoriel engendré.
   - Famille génératrice d'un espace vectoriel.
   - Famille libre.
   - Base.
   - Dimension d'un espace vectoriel.
   - $F \subset G \Longrightarrow \dim F \leq \dim G$
   - $F \subset G$ et $\dim F = \dim G \Longrightarrow F = G$
   - Cardinal maximal d'une famille libre dans un espace de dimension p
   - Cardinal minimal d'une famille génératrice dans un espace de dimension p
   - Une famille libre à p éléments dans un espace de dimension p est une base.
   - Une famille génératrice à p éléments dans un espace de dimension p est une base.
   - Rang d'une famille de vecteurs (déf = dimension de l'espace vectoriel engendré), lien avec le rang de la matrice et du système
2. Informatique
   (a) Parcours de listes.
   (b) Modélisation d'une expérience aléatoire a l'aide de de la bibliothèque `random` plus particulièrement des fonctions `randint()` et `random`

2 Exercices Types

Exercice 1. *Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?*

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2x - y = 0\}$
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x - 3y + 1 = 0\}$
3. $C = \{(x+2y, y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$
4. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$

Exercice 2. *Trouver une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :*

1. $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - y + z = 0 \text{ et } y - 2t = 0\}$
2. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x + y + z = 0\}$
3. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad ax + by + z = 0\}$

Exercice 3. *Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ? Si elle est liée, exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des autres.*

1. $u = (1,-1,0)$, $v = (2,1,-1)$ *et* $w = (1,5,-1)$
2. $u = (1,1,2)$, $v = (2,1,0)$ *et* $w = (3,1,\lambda)$ λ *paramètre réel.*
3. $u = (1,0,-2)$, $v = (2,3,1)$ *et* $w = (4,-2,1)$
4. $u = (1,1,-1)$, $v = (1,-1,1)$, $w = (-1,1,1)$ *et* $t = (1,1,1)$

Exercice 4. *Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Donner une base de F et sa dimension.*

1. $E = \mathbb{R}^3$ *et* $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - y + 3z = 0$ *et* $2x - y + z = 0\}$
2. $E = \mathbb{R}^3$ *et* $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - y + 4z = 0\}$
3. $E = \mathbb{R}^3$ *et* $F = \{(x + 2y - 2z, -x + 3y - z, x + 7y - 5z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$
4. $E = \mathbb{R}^4$ *et* $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad 2xy + z - t = 0$ *et* $x - y + z + t = 0$ *et* $x + 2y - at = 0\}$ *avec* a *un paramètre réel.*

Exercice 5. *Déterminer le rang de la famille* (u_1, u_2, u_3, u_4) *avec* $u_1 = (\lambda, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, \lambda, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, \lambda, 1)$ *et* $u_4 = (1, 1, 1, \lambda)$. *Discuter selon les valeurs de* $\lambda \in \mathbb{R}$.